

## شناسایی سیستم‌های غیرخطی با بکارگیری فیلترهای تطبیقی IIR Spline

چکیده:

در تحقیق شناسایی سیستم‌های غیرخطی با بکارگیری فیلترهای تطبیقی<sup>۱</sup> IIR برای ساختار بلوکی جهت‌دار واینر<sup>۲</sup> بررسی می‌شود. ساختار بلوکی جهت‌دار از اتصال سری یک فیلتر خطی تغییرناپذیر با زمان<sup>۳</sup> و یک تابع غیرخطی استاتیک (بدون حافظه) تشکیل می‌شود. دو نوع پایه این ساختار، مدل واینر و مدل همرشین<sup>۴</sup> می‌باشد. در مدل واینر ورودی ابتدا وارد فیلتر خطی شده و سپس خروجی آن به عنوان ورودی، وارد بلوک غیرخطی استاتیک می‌شود. در مدل همرشین جای این دو بلوک جابجا می‌شوند. این تحقیق مدل واینر را جهت شناسی در نظر می‌گیرد و فیلتر غیرخطی استفاده شده IIR است.

### ۱- مقدمه:

در چند دهه اخیر تلاش‌های زیادی در زمینه تئوری و کاربرد و فیلترینگ تطبیقی غیرخطی صورت گرفته است [۱ و ۲]. متأسفانه برعکس مورد خطی [۳] در موارد غیرخطی هنوز یک قالب تئوری کلی در دسترس نیست.

برای مدل کردن سیستم‌های غیرخطی سری‌های والترا<sup>۵</sup> [۴] ارائه شده است. بدلیل تعداد زیاد پارامترهای آزادی که در این سری‌ها وجود دارد، کاربرد آنها تنها در مواردی مناسب است که رفتار غیرخطی سیستم شدید نباشد [۴ و ۵]. به همین دلیل بکارگیری الگوریتم (FAPA)<sup>۶</sup> که در واقع مدل ساده شده‌ای از (VAF)<sup>۷</sup> است، ترجیح داده می‌شود [۶ و ۷].

شبکه‌های عصبی (NNS)<sup>۸</sup> [۸] هم، ابزار منعطفی در زمینه شناسایی فیلترهای غیرخطی هستند، اما در کاربرد آنها با مسائلی نظیر حجم زیاد محاسبات و مشکلاتی در بحث تطبیق مواجه هستیم.

در عمل، برای فیلترینگ غیرخطی، از تحقیق بلوکی جهت‌دار سیستم غیر خطی استفاده می‌شود که بصورت سری یک فیلتر خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) و یک تابع غیر خطی استاتیک است. کلاس پایه سیستم‌های غیرخطی بلوکی جهت‌دار، بوسیله مدل بلوکی واینر و مدل همرشین و ترکیبات سری، فیدبک و... آنها بدست می‌آید. این دو مدل در شکل زیر آمده‌اند.

<sup>1</sup> Infinite Impulse Response

<sup>2</sup> Wiener Block Oriented Architecture

<sup>3</sup> LTI Filter

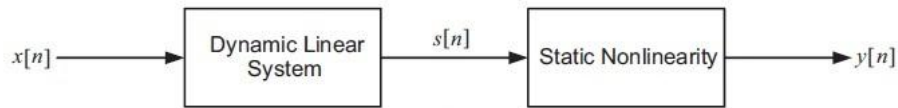
<sup>4</sup> Hammer Stein

<sup>5</sup> Volterra Series

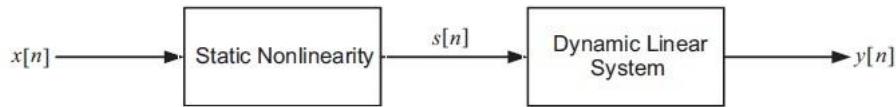
<sup>6</sup> Fast Affine Projection Algorithm

<sup>7</sup> Volterra Adaptive Filters

<sup>8</sup> Neural Networks



Wiener system (a)



Hammerstein system (b)

شکل ۱: بلوک دیاگرام سیستم واینر و همرشین

فیلترهای تطبیقی Spline (SAF)<sup>۱</sup>، معماری دیگر از بلوک‌های جهت‌دار واینر می‌باشند. این مدل متشکل از یک فیلتر خطی تغییرناپذیر با زمان است که به دنبال آن یک جدول مرجع (LUT)<sup>۲</sup> قابل تطبیق قرار می‌گیرد که از طریق خروجی یک ترکیب‌کننده خطی آدرس دهی شده و توسط قطعات منحنی Spline چند جمله‌ای مرتبه پایین، میان‌یابی می‌شود. در [۹] نشان داده شده است که SAF توانایی خوبی در تقریب سیستم واینر با رفتار غیرخطی شدید، دارد. روش SAF ارائه شده در [۹] یک فیلتر FIR را بکار برده است، اما در این تحقیق فیلتر LTI از نوع IIR در نظر گرفته می‌شود. امتیاز بکارگیری فیلتر IIR نسبت به نسبت به FIR در پیاده‌سازی آن است. چرا که می‌توان با تعداد پارامترهای آزاد کمتری به یک مشخصه مطلوب را تنظیم کرد. [۱۳ و ۹] تنظیم با استفاده از روش گرادیان نزولی تصادفی و با بکارگیری خطای خروجی، صورت می‌پذیرد.

از آنجا که جدول مرجع (LVT) میان‌یابی شده توسط Spline، یک تابع محدود است، لذا اگر فیلتر IIR پایدار باشد، پایداری کل سیستم از نقطه نظر (BIBO)<sup>۳</sup>، تضمین می‌شود. در [۱۱ و ۱۲] روش‌های جهت‌پایدارسازی فیلترهای ناپایدار توسط بررسی قطب‌های تابع انتقال آن‌ها، ارائه شده است که ما از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

۲- میان‌یابی با استفاده از Spline (Spline Integration)

Spline‌ها در واقع منحنی‌های پارامتری و پیوسته و نرمی هستند که از طریق میلن یابی نقاط مشخصی به نام نقاط کنترل<sup>۴</sup> که در یک جدول مرجع قرار دارند، تعریف می‌شوند. فرض کنید  $y[n] = \varphi(S[n])$  تابعی باشد که که قرار است تخمین زده شود.

<sup>1</sup> Spline Adaptive Filter

<sup>2</sup> Look Up Table

<sup>3</sup> Bounded Input Bounded Output

<sup>4</sup> Control Points

میان یابی با استفاده از Spline تابع  $\varphi_{i_n}(u_n)$  را فراهم می‌آورد که بر پایه دو پارامتر  $u_n$  و  $i_n$  می‌باشد. این دو پارامتر مستقیماً وابسته  $S[n]$  هستند. در حالت کلی اگر تعداد نقاط کنترل  $Q$  باشد، این روش تقریب به تعداد  $Q - 1$  تابع چند جمله‌ای را که مربوط به گستره‌های مجاور یکدیگر هستند، در اختیار می‌گذارد. در این ما از Spline های مکعبی<sup>۱</sup> استفاده می‌کنیم بنابراین برای هر  $S[n]$ ، Spline چهار نقطه کنترل را در نظر می‌گیرد که دو تا در سمت چپ و دو تا در سمت راست  $S[n]$  خواهد بود. برای مشخص کردن گستره (یعنی  $i_n$ ) و پارامتر محلی  $u_n$  از روابط زیر استفاده می‌شود [۹].

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{s[n]}{\Delta x} - \left\lfloor \frac{s[n]}{\Delta x} \right\rfloor, \\ i_n &= \left\lfloor \frac{s[n]}{\Delta x} \right\rfloor + \frac{Q-1}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\Delta x$  فاصله بین نقاط کنترل مجاور است که به طور مساوی در بازه تقسیم شده‌اند و  $Q$  تعداد کل نقاط کنترل است. برای سادگی  $i_n \equiv i$  و  $u_n \equiv u$  در نظر می‌گیریم. خروجی میان‌یابی شده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y[n] = \varphi_i(u_n) = \mathbf{u}_n^T \mathbf{C} \mathbf{q}_{i,n}, \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{u}_n \in R^{4 \times 1} = [u_n^3 \ u_n^2 \ u_n \ 1]^T$  و  $\mathbf{q}_{i,n} \in R^{4 \times 1} = [q_i \ q_{i+1} \ q_{i+2} \ q_{i+3}]^T$  که  $q_k$  معرف نقطه کنترل  $k$ ام و  $C$  یک ماتریس  $4 \times 4$  می‌باشد و با توجه به اینکه کدام پایه Spline برای میان‌یابی بکار رفته، انتخاب می‌شود.

برای تعیین  $C$  به [۹] مراجعه کنید. مشتق رابطه (۲) نسبت به  $u_n$  سادگی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi'_i(u_n) = \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{C} \mathbf{q}_{i,n}, \quad (3)$$

که در آن  $\dot{\mathbf{u}}_n \in R^{4 \times 1} = [3u^2 \ 2u \ 1 \ 0]$  است.

### ۳- فیلترهای تطبیقی IIR Wiener Spline

با ارجاع به شکل (۱)، فرض می‌کنیم که رابطه بین ورودی و خروجی فیلترهای تطبیقی بصورت زیر است:

$$y[n] = \varphi(s[n], \mathbf{q}_{i,n}) = \mathbf{u}_n^T \mathbf{C} \mathbf{q}_{i,n}, \quad (4)$$

$$s[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k[n] x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k[n] s[n-k], \quad (5)$$

<sup>1</sup> Cubic Spline Curves

که در آن‌ها  $b_k[n]$  و  $a_k[n]$  ضرایب صورت و مخرج فیلتر IIR هستند. در واقع  $S[n]$  خروجی فیلتر IIR و  $X[n]$  ورودی آن است. برای اطلاعات بیشتر در مورد فیلترهای IIR به [WWW.Wikipedia.org/wiki/Infinite\\_response](http://WWW.Wikipedia.org/wiki/Infinite_response) مراجعه کنید.

برای سادگی به جای فرم رابطه (۵) از فرم ماتریسی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^{(M+N) \times 1} = [b_0[n], b_1[n], \dots, b_{M-1}[n], a_1[n], \dots, a_N[n]]^T. \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n \in [x[n] \quad \dots \quad x[n-M+1] \quad s[n-1] \quad \dots \quad s[n-N]]^T$$

که در آن  $M$  و  $N$  به ترتیب مرتبه صورت و مخرج فیلتر می‌باشد.

$$s[n] = \mathbf{w}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (7)$$

برای رسیدن به الگوریتم آموزشی LMS، تابع هزینه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$J(\mathbf{w}_n, \mathbf{q}_{l,n}) = e^2[n], \quad (8)$$

که در آن  $e[n] = d[n] - y[n]$ ، سیگنال خطا و  $d[n]$  سیگنال مرجع می‌باشد. به این ترتیب رابطه تطبیق برای وزن‌های فیلتر خطی، یعنی همان بردار  $\mathbf{w}_n$ ، بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w}_n &= \nabla_{\mathbf{w}_n} J(\mathbf{w}_n, \mathbf{q}_{l,n}) = -2e[n] \nabla_{\mathbf{w}_n} y[n] \\ &= -2e[n] \frac{\partial y[n]}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial s[n]} \nabla_{\mathbf{w}_n} s[n] = -2e[n] \varphi'(u_n) \frac{1}{\Delta X} \nabla_{\mathbf{w}_n} s[n], \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن بردار گرادیان  $\nabla_{\mathbf{w}_n} S[n]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_{\mathbf{w}_n} s[n] = \left[ \frac{\partial s[n]}{\partial b_0[n]}, \dots, \frac{\partial s[n]}{\partial b_{M-1}[n]}, \frac{\partial s[n]}{\partial a_1[n]}, \dots, \frac{\partial s[n]}{\partial a_N[n]} \right]^T.$$

با استفاده از رابطه (۵) به سادگی می‌توان بدست آورد که:

$$\frac{\partial s[n]}{\partial b_i[n]} = x[n-i] + \sum_{k=1}^N a_k[n] \frac{\partial s[n-k]}{\partial b_i[n]}, \quad (10)$$

که در آن  $i = 0, 1, \dots, M-1$  است و

$$\frac{\partial s[n]}{\partial a_i[n]} = s[n-i] + \sum_{k=1}^N a_k[n] \frac{\partial s[n-k]}{\partial a_i[n]}, \quad (11)$$

$$i = 1, \dots, N$$

برای سادگی در نوشتن  $\beta_i[n] = \frac{\partial s[n]}{\partial b_i[n]}$  و  $\alpha_i[n] = \frac{\partial s[n]}{\partial a_i[n]}$  در نظر می‌گیریم. همچنین با فرض اینکه ضرایب  $a_i[n]$  و  $b_i[n]$  با زمان به کندی تغییر می‌کنند [۳]، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial s[n-k]}{\partial b_i[n]} \approx \frac{\partial s[n-k]}{\partial b_i[n-k]} = \beta_i[n-k], \quad (12)$$

$$\frac{\partial s[n-k]}{\partial a_i[n]} \approx \frac{\partial s[n-k]}{\partial a_i[n-k]} = \alpha_i[n-k], \quad (13)$$

برای  $k = 1, \dots, N$

حال با جایگذاری (۱۲) و (۱۳) در (۱۰) و (۱۱) رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$\beta_i[n] = x[n-i] + \sum_{k=1}^N a_k[n] \beta_i[n-k], \quad (14)$$

$$\alpha_i[n] = s[n-i] + \sum_{k=1}^N a_k[n] \alpha_i[n-k]. \quad (15)$$

حال بردار را تعریف می‌کنیم.

$$\boldsymbol{\eta}_n \in \mathbb{R}^{(M+N) \times 1} = [\beta_0[n], \beta_1[n], \dots, \beta_{M-1}[n], \alpha_1[n], \dots, \alpha_N[n]]^T, \quad (16)$$

و نهایتاً با به کارگیری روابط [۹] و [۱۶]، الگوریتم LMS برای آموزش ضرایب غیرخطی بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu_w[n] \varphi'(u_n) e[n] \boldsymbol{\eta}_n, \quad (17)$$

که در آن  $\mu_w[n]$ ، نرخ یادگیری ضرایب است و می‌تواند مقادیر ثابت ۲ و  $\Delta x$  را داشته باشد.

برای تطبیق نقاط کنترل Spline بصورت زیر عمل می‌کنیم [۹].

$$\Delta \mathbf{q}_{i,n} = \nabla_{\mathbf{q}_{i,n}} J(\mathbf{w}_n, \mathbf{q}_{i,n}) = -2e[n] \nabla_{\mathbf{q}_{i,n}} y[n] = -2e[n] \mathbf{C}^T \mathbf{u}_n, \quad (18)$$

$$\mathbf{q}_{i,n+1} = \mathbf{q}_{i,n} + \mu_q[n] e[n] \mathbf{C}^T \mathbf{u}_n, \quad (19)$$

که نرخ یادگیری  $\mu_q[n]$  می‌تواند هر مقدار ثابتی باشد.

#### ۴- شبیه سازی

برای شبیه سازی مدل بلوکی جهت دار واینر را بصورت زیر در نظر می گیریم که در آن فیلتر خطی تغییرناپذیر با زمان، از نوع IIR و مطابق رابطه زیر است.

$$H(z) = \frac{0.6 - 0.4z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.5z^{-2} + 0.1z^{-3}} = \frac{S(z)}{X(z)}$$

تابع غیرخطی سری شده با فیلتر LTI هم بصورت  $y[n] = 0.1\sin(15S^2[n])$  است.

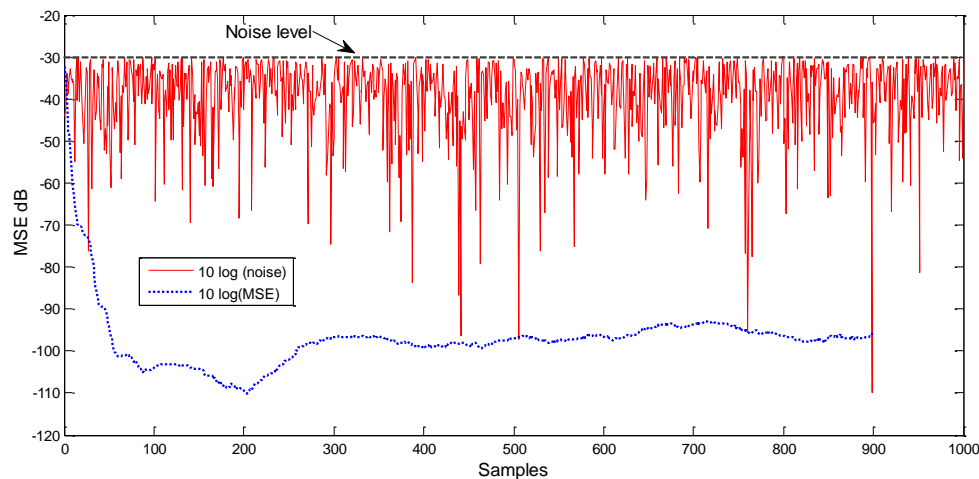
با توجه به  $H(z)$  می توان دریافت که  $M = 2$  و  $N = 3$  است. رابطه ورودی-خروجی  $H(z)$  را می توان به فرم ماتریسی زیر هم نوشت که برای برنامه نویسی فیلتر LTI مناسب تر است.

$$S[n] = W_r^T X_n$$

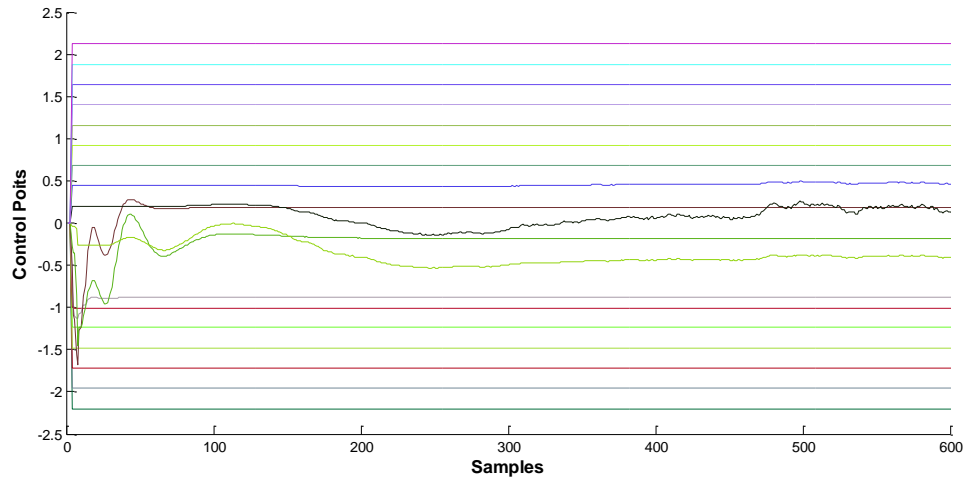
که بردار مرجع و  $W_r = [x[n] \ x[n-1] \ s[n-1] \ s[n-2] \ s[n-3]]^T$  می باشد. مقدار اولیه برای نقاط کنترل را بصورت یک خط راست در صفحه  $y-s$  و به تعداد ۱۹ نقطه در فواصل مساوی در نظر می-گیریم.  $q_0 = [-2.2 \ -1.96 \ -1.72 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1.88 \ 2.12]$ . نتایج شبیه سازی در شکل زیر آمده است. ورودی  $x[n]$  هم با توجه به رابطه زیر تولید می شود که در آن  $s[n]$  نویز سفید گوسی با واریانس ثابت و مقدار میانگین صفر است. پارامتر  $0 < a < 1$  یک ثابت است که میزان همبستگی نمونه های مجاور را نشان می-دهد.

$$x[n] = ax[n-1] + \sqrt{1-a^2}\xi[n], \quad (26)$$

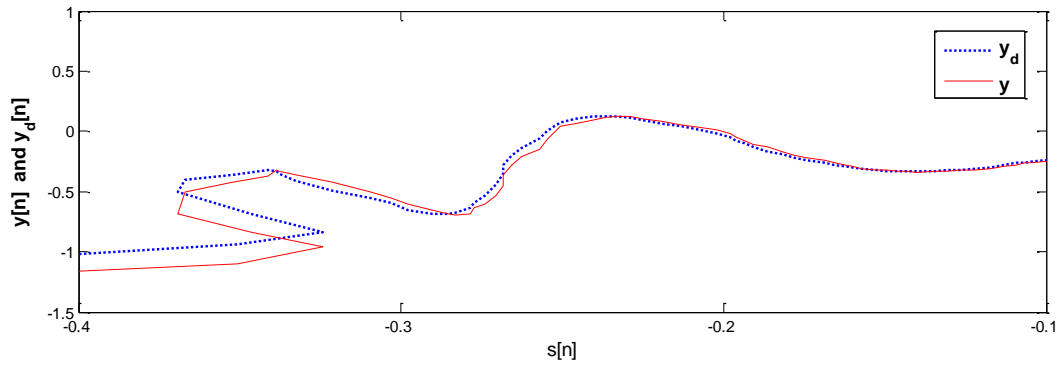
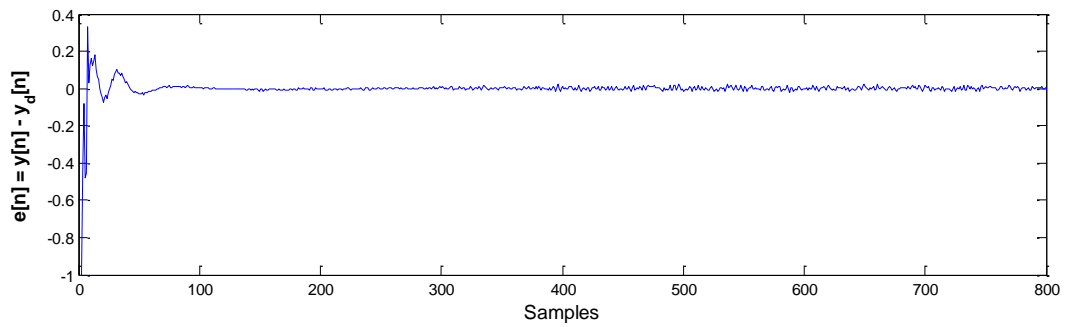
$$C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$



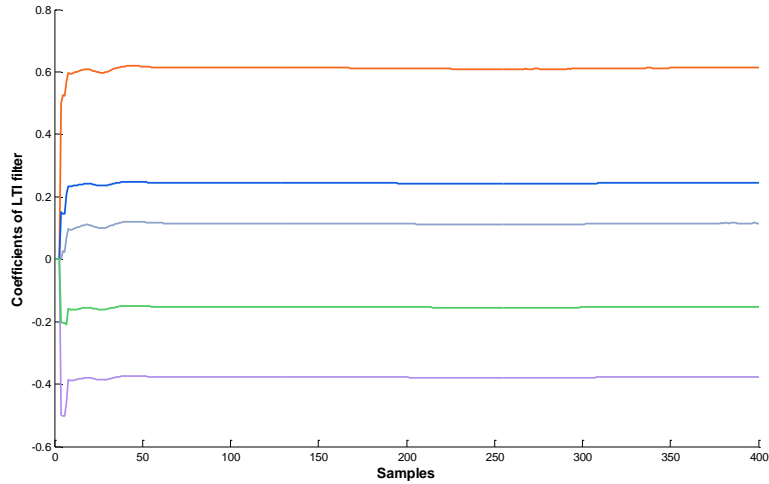
شکل ۲: میانگین MSE بر روی ۱۰۰ نمونه برای  $a = 0.99$



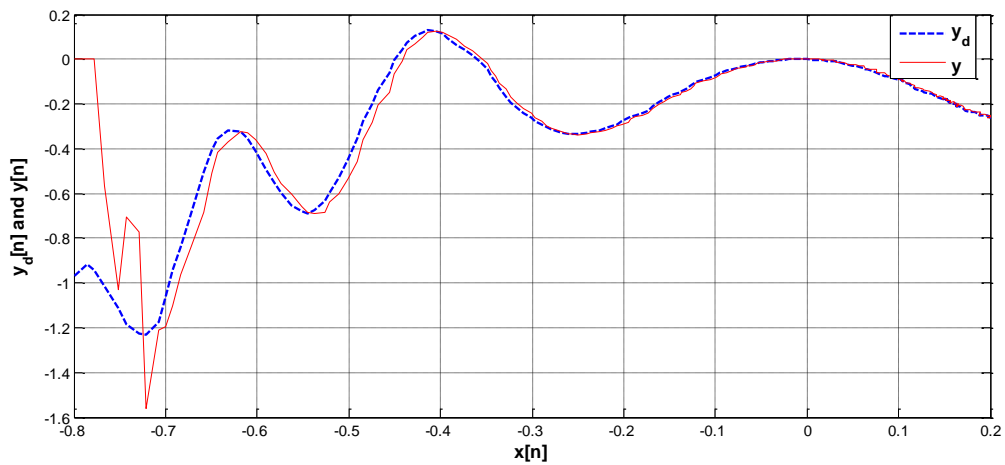
شکل ۳: همگرایی نقاط کنترل



شکل ۴: خطای تقریب و مقایسه  $y_d$  و  $y$



شکل ۵: تطبیق و همگرایی وزن های فیلتر IIR خطی تغییرناپذیر با زمان



شکل ۶: خروجی مدل تقریبی و خروجی مطلوب

جدول ۱: مقادیر اولیه و میانگین آموزش یافته وزن های فیلتر خطی

<i>Tap</i>	$W_0$	<i>Mean</i>	<i>Variance</i>
$b_0$	0.5	0.6139	0.0012
$b_1$	0	0.1170	0.0001
$a_1$	0.15	0.2443	0.0002
$a_2$	-0.5	-0.3718	0.0005
$a_3$	-0.2	-0.1475	0.0001



جدول ۱: مقادیر اولیه و میانگین آموزش یافته نقاط کنترل

$i$	$q_0$	$Mean$	$Variance$
1	-2.2	-2.1934	0.0144
2	-1.96	-1.9541	0.0115
3	-1.72	-1.7149	0.0088
4	-1.48	-1.4756	0.0065
5	-1.24	-1.2363	0.0046
6	-1	-1.0079	0.0030
7	-0.76	-0.9038	0.0027
8	-0.52	0.0751	0.0193
9	-0.28	-0.1884	0.0148
10	-0.04	-0.3349	0.0097
11	0.2	0.2589	0.0229
12	0.44	0.4799	0.0018
13	0.68	0.6780	0.0014
14	0.92	0.9173	0.0025
15	1.16	1.1565	0.0040
16	1.4	1.3985	0.0058
17	1.64	1.6351	0.0080
18	1.88	1.8744	0.0105
19	2.12	2.1137	0.0134

مراجع:

- [1] N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1958.
- [2] L. Ljung, System Identification—Theory for the User, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [3] A. Uncini, Fundamentals of Adaptive Signal Processing, Springer- Verlag, Berlin, Germany, 2014.
- [4] V.J. Mathews, G.L. Sicuranza, Polynomial Signal Processing, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2000.
- [5] J.-M. Le Caillec, Spectral inversion of second order Volterra models based on the blind identification of Wiener models, Signal Process. 91 (11) (2011) 2541–2555.
- [6] R. Niemisto, T. Makela, V. Mllyla, Robust fast affine projection algorithm for nonlinear acoustic echo cancellation, in: Proceedings of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Toulouse, France, September 2002, pp. 523–526.
- [7] F. Albu, C. Kotropoulos, Modified Gauss-Seidel affine projection algorithm for acoustic echo cancellation, in: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), vol. 3, Philadelphia, PA, March 2005, pp. 121–124.

[8] S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2009.

[9] M. Scarpiniti, D. Comminiello, R. Parisi, A. Uncini, Nonlinear spline adaptive filtering, *Signal Process.* 93 (4) (2013) 772–783.

[10] P.A. Regalia, *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*, Marcel Dekker, New York, 1995.

[11] A. Carini, V.J. Mathews, G.L. Sicuranza, Sufficient stability bounds for slowly varying direct-form recursive linear filters and their applications in adaptive IIR filters, *IEEE Trans. Signal Process.* 47 (9) (1999) 2561–2567.

[12] A.D. Back, A.C. Tsoi, A simplified gradient algorithm for IIR synapse multilayer perceptrons, *Neural Comput.* 5 (3) (1993) 456–462.

[13] M. Scarpiniti, D. Comminiello, R. Parisi, A. Uncini, Nonlinear system identification using IIR Spline Adaptive Filters, *Fast communication. Signal Processing* 108 (2015) 30–35