

به نام خدا

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

جایی که:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.1026 & -5.0321 & -5.144 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -36.0769 & 15.2397 & -0.0088 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9319 \\ -2.8222 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

۱ - برای بررسی کنترل پذیری، ماتریس کنترل پذیری را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$Co = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.9319 & -4.688 & 17.649 \\ 0 & -2.8222 & 14.2267 & 30.2479 \\ 0.9319 & -4.688 & 17.649 & -58.9141 \\ -2.8222 & 14.2267 & 30.2479 & -244.5561 \end{bmatrix}$$

در صورتی که این ماتریس رنک کامل داشته باشد، سیستم کنترل پذیر است.

$$\det(Co) = -6.1052 \cdot 10^{-3} \neq 0$$

در نتیجه، سیستم کنترل پذیر می باشد.

۲ - برای بررسی رویت پذیری، ماتریس رویت پذیری را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36.0769 & 15.2397 & -0.0088 \\ 0 & 32.3605 & -76.8218 & -36.0847 \end{bmatrix}$$

همان گونه که مشخص می باشد، دترمینان ماتریس رویت پذیری صفر می باشد، لذا سیستم رویت پذیر نخواهد بود.

۳- برای قطری سازی، ابتدا به بررسی مقادیر ویژه ماتریس A می پردازیم:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = -0.2912 \pm j5.7834 \\ \lambda_4 = -4.4584 \end{cases}$$

از آنجایی که مقادیر ویژه به صورت مختلط می باشند، بردارهای ویژه آن به صورت زیر می باشد:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{2,3} = \begin{bmatrix} -0.0046 \pm j0.0069 \\ -0.0085 \pm j0.1698 \\ -0.0385 \pm j0.0283 \\ 0.9843 \pm j0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -13.91 \\ 0.169 \\ 0.62 \\ -0.7534 \end{bmatrix}$$

تبدیل همانندی که برای تبدیل سیستم به سیستم قطری در نظر گرفته می شود، به صورت زیر می باشد:

$$T = [v_1 \quad \text{Re}(v_2) \quad \text{Im}(v_2) \quad v_4]$$

جایی که v_1, v_2, v_3, v_4 بردارهای ویژه سیستم می باشند.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -0.0046 & 0.0069 & -0.1391 \\ 0 & -0.0085 & -0.1698 & 0.1690 \\ 0 & -0.0385 & -0.0283 & 0.62 \\ 0 & 0.9843 & 0 & -0.7534 \end{bmatrix}$$

با بدست آوردن ماتریس تبدیل، سیستم قطری شده به صورت زیر ایجاد می گردد:

$$x = Tz \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2912 & 5.7834 & 0 \\ 0 & -5.7834 & -0.2912 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.4584 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.1852 \\ -1.7456 \\ 1.5467 \\ 1.4654 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad -0.0085 \quad -0.1698 \quad 0.169]z \end{cases}$$

۴- برای طراحی کنترل کننده فیدبک حالت به صورت زیر عمل می کنیم. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

روش بس و گیورا:

چند جمله ای مشخصه سیستم:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.1026 & -5.0321 & -5.144 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -36.0769 & 15.2397 & -0.0088 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -2.1026 & \lambda + 5.0321 & 5.144 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 36.0769 & -15.2397 & \lambda + 0.0088 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 + 5.049\lambda^3 + 36.129\lambda^2 + 149.4996\lambda = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

اگر چند جمله ای مشخصه مطلوب مورد نظر ما به صورت زیر باشد:

$$\alpha(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$$

طبق روش بس و گیورا خواهیم داشت:

$$K = (\alpha - a) \Psi^{-1} \Phi_c^{-1}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5.049 & 36.129 & 149.4996 \\ 0 & 1 & 5.049 & 36.129 \\ 0 & 0 & 1 & 5.049 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [10 - 5.049 \quad 35 - 36.129 \quad 50 - 149.4996 \quad 24] \Psi^{-1} \Phi_c^{-1} = [0.9097 \quad 0.7021 \quad -3.5865 \quad -2.9386]$$

۵ - برای طراحی رویت گر حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

شرط طراحی رویت برای یک سیستم به صورت زیر می باشد:

شرط لازم و کافی طراحی رویت گر رویت پذیری سیستم است.

از آنجایی که سیستم فوق رویت پذیر نمی باشد، پس نمی توان برای آن رویت گر طراحی کرد.

برای طراحی رویت گر برای سیستم زیر، بدین صورت عمل میکنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4.8266 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9233 \\ 0 \\ -0.4473 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

با انتخاب قطب های رویت گر در $-2.8 \pm j1.2$ و $-3.2 \pm j1.2$ ماتریس بهره رویت گر L باید به گونه ای بدست

آید که ریشه های معادله مشخصه ماتریس $A-LC$ برابر قطب های تعریف شده در فوق باشد. این ماتریس برابر

خواهد بود با:

$$.L = 10^4 * [0.0012 \ 0.0204 \ -0.713 \ -1.7962]$$

کدهای متلب این قسمت به صورت زیر می باشد:

```
A = [0 1 0 0; 0 0 -0.1536 0; 0 0 0 1; 0 0 4.8266 0];  
C = [1 0 0 0];  
observability_rank = rank(observ(A,C))  
P = 4*[-0.7+3i,-0.7-3i,-0.8+0.3i,-0.8-0.3i];  
L = acker(A',C',P)
```