

کنترل غیر متمرکز تطبیقی برای کلاسی از سیستم‌های غیر خطی

مقیاس بزرگ با تزویج نامعلوم

چکیده: در این گزارش، یک روش کنترل تطبیقی غیر متمرکز برای کلاسی از سیستم‌های غیر خطی با زیر سیستم‌ها و برهم‌کنش‌های نامعلوم شبیه‌سازی شده است. در این روش، یک کنترل کننده تطبیقی با استفاده از روش لیاپانوف چنان طراحی شده است که با انتخاب قوانین تطبیق مناسب پایداری سیستم تضمین می‌شود. همچنین، روش ارائه شده پایداری سیستم را بدون شناخت از علامت ضریب کنترلی برآورده می‌سازد. به منظور بررسی عملکرد روش تطبیقی، یک سیستم غیرخطی جهت انجام شبیه‌سازی انتخاب شده است. شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار Matlab صورت گرفته است.

۱. بیان مسئله

یک سیستم غیرخطی مقیاس بالا شامل N زیر سیستم متصل به هم در نظر گرفته شده است. i امین زیرسیستم (S_i) ، که فرض شده است که تک ورودی-تک خروجی است، به صورت زیر بیان شده است

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x_1, \dots, x_N) + g_i(x_i)u_i \\ y_i &= h_i(x_1, \dots, x_N)\end{aligned}\quad (1)$$

که $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ حالت‌های کامل کل، $1 \leq i \leq N$ بردار حالت، $x_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n_i}]^T$ سیستم، $F(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ، $g_i(\cdot) \in \mathbb{R}$ ، $h_i(\cdot) \in \mathbb{R}$ توابع هموار نامعلوم، $u_i \in \mathbb{R}$ و $y_i \in \mathbb{R}$ به ترتیب ورودی و خروجی i امین زیرسیستم می‌باشند. اگر هر زیرسیستمی دارای درجه نسبی m_i باشد، بنابراین دینامیک خروجی می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$y_i^{(m_i)} = \sum_{k=1}^l \alpha_{i,k} f_{i,k}(x_i) + \beta_i u_i + \Delta_i(x_1, \dots, x_N) \quad (2)$$

که $y_i^{(m_i)}$ مشتق زمانی m_i ام y_i و $\alpha_{i,k}$ و β_i پارامترهای نامعلوم می‌باشند. برای طراحی کنترل کننده، در رابطه (۲) نیاز به شناخت علامت β_i در تمام زیر سیستم‌ها می‌باشد.

فرض: ترم تزویج $\Delta_i(x_1, \dots, x_N)$ کراندار به صورت $|\Delta_i(x_1, \dots, x_N)| \leq \rho_i$ می‌باشد که ρ_i نامعلوم و بزرگتر از صفر می‌باشد.

حال خطای ردیابی $e_i = r_i - y_i$ را برای S_i معرفی می‌کنیم که r_i خط سیر مطلوب خروجی و y_i خروجی i امین زیرسیستم می‌باشد. هدف طراحی سیستم کنترلی تطبیقی برای هر زیرسیستم به منظور ردیابی خروجی مطلوب در حضور ترم‌های تزویج و استفاده از اندازه‌گیری‌های محلی می‌باشد. برای این منظور نیاز به بیان فرض زیر می‌باشد

فرض: خط سیر مطلوب خروجی و مشتقات آن $r_i, \dots, r_i^{(m_i)}$ برای زیرسیستم S_i قابل اندازه‌گیری و کراندار می‌باشند.

فرض کنید بردار خطای خروجی برای i امین زیرسیستم به صورت $\mathbf{e}_i = [e_i, \dot{e}_i, \dots, e_i^{(m_i-1)}]^T$ تعریف شود که در این صورت مشتق آن به صورت زیر خواهد بود

$$\dot{\mathbf{e}}_i = [\dot{e}_i, e_i^{(2)}, \dots, e_i^{(m_i)}]^T \quad (3)$$

دینامیک خطا می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\dot{e}_i^{(m_i)} = r_i^{(m_i)} - y_i^{(m_i)} \quad (4)$$

مطلوب است که خطای خروجی i امین زیرسیستم $e_i^{(m_i)} + a_{i,m-1}e_i^{(m_i-1)} + \dots + a_{i,0}e_i = 0$ را تعقیب کند که در آن ضریب طوری انتخاب شده‌اند که ریشه‌های هر $L_i(s) = s^{m_i} + a_{i,m-1}s^{m_i-1} + \dots + a_{i,0}$ در سمت چپ قرار داشته باشند. حالا با استفاده از (۲) و (۴) داریم

$$e_i^{(m_i)} = r_i^{(m_i)} - \sum_{k=1}^l \alpha_{i,k} f_{i,k}(x_i) + \beta_i u_i + \Delta_i \quad (5)$$

۲. کنترل کننده تطبیقی غیر متمرکز

در این بخش یک کنترل کننده تطبیقی برای (۲) با توابع تزویج نامعلوم ارائه می‌شود. یک الگوریتم تطبیقی برای تخمین پارامترهای $\alpha_{i,k}$ ، β_i و ρ ارائه می‌شود. برای i امین زیرسیستم، کنترل کننده زیر ارائه می‌شود

$$u_i = \frac{v_i}{\hat{\beta}_i} \quad (6)$$

که سیگنال v_i به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v_i \triangleq \left(a_{i,0}e_i + a_{i,1}\dot{e}_i + a_{i,2}e_i^{(2)} + \dots + a_{i,m_i-1}e_i^{(m_i-1)} \right) - \sum_{k=1}^l \hat{\alpha}_{i,k} f_{i,k}(x_i) + r_i^{(m_i)} + \hat{\rho}_i \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T) \quad (7)$$

که P_i و \mathbf{b}_i به ترتیب در روابط (۱۳) و (۱۴) ارائه شده‌اند. با جاگذاری (۶) در (۵) داریم

$$e_i^{(m_i)} = r_i^{(m_i)} - \sum_{k=1}^l \alpha_{i,k} f_{i,k}(x_i) - \frac{\beta_i}{\hat{\beta}_i} v_i - \Delta_i \quad (8)$$

ترم سوم $\frac{\beta_i}{\hat{\beta}_i}$ در رابطه (۸) برابر است با

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_i} = 1 - \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\beta}_i} = 1 - \frac{\tilde{\beta}_i}{\hat{\beta}_i} \quad (9)$$

که $\tilde{\beta}_i$ به صورت $\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i - \beta_i$ تعریف می‌شود. با استفاده از (۸) و (۹) خواهیم داشت

$$e_i^{(m_i)} = r_i^{(m_i)} - \sum_{k=1}^l \alpha_{i,k} f_{i,k}(x_i) - v_i + \frac{\tilde{\beta}_i}{\hat{\beta}_i} v_i - \Delta_i \quad (10)$$

از (۷) و (۱۰)، رابطه (۱۰) به صورت زیر خواهد بود

$$e_i^{(m_i)} = \sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_{i,k} f_{i,k}(x_i) - (a_{i,0}e_i + a_{i,1}\dot{e}_i + a_{i,2}e_i^{(2)} + \dots + a_{i,m_i-1}e_i^{(m_i-1)}) - \hat{\rho}_i \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T) + \frac{\tilde{\beta}_i}{\hat{\beta}_i} v_i - \Delta_i \quad (11)$$

که در آن $\tilde{\alpha}_{i,k}$ به صورت $\tilde{\alpha}_{i,k} = \hat{\alpha}_{i,k} - \alpha_{i,k}$ تعریف می‌شود.

با جاگذاری (۱۱) در (۳)، دینامیک خطا به صورت ماتریسی زیر قابل بیان است

$$\dot{\mathbf{e}}_i = A_i \mathbf{e}_i + \mathbf{b}_i \left(\sum_{k=1}^l \tilde{\alpha}_{i,k} f_{i,k}(x_i) - \hat{\rho}_i \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T) + \frac{\tilde{\beta}_i}{\hat{\beta}_i} v_i - \Delta_i \right) \quad (12)$$

که ماتریس هورویتس A_i و بردار \mathbf{b}_i به صورت زیر می‌باشند

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_{i,0} & -a_{i,1} & -a_{i,2} & \dots & \dots & -a_{i,m_i-1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{b}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$$

از آنجاییکه A_i هورویتس می‌باشد، یک پاسخ مثبت P_i برای معادله لیاپانوف زیر وجود دارد

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -Q_i \quad (14)$$

که ماتریس Q_i مثبت معین می باشد.

قوانین تطبیق به صورت زیر ارائه می شوند

$$\dot{\hat{\alpha}}_{i,k} = -\gamma_{\alpha_i} f_{i,k}(x_i) \mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T \quad (15)$$

$$\dot{\hat{\beta}}_i = -\gamma_{\beta_i} \mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T v_i / \hat{\beta}_i \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_i = \gamma_{\rho_i} \left| \mathbf{e}_i^T P_i \mathbf{b}_i^T \right| \quad (17)$$

که $\gamma_{\alpha_i}, \gamma_{\beta_i}, \gamma_{\rho_i} > 0$ پارامترهای ثابت طراحی می باشند.

۳. مثال طراحی

در این بخش، جهت ارزیابی طرح پیشنهاد شده، سیستم پاندول معکوس متصل به فنر با روش تطبیقی ارائه شده کنترل می شود. معادلات سیستم به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,1} = x_{1,2} \\ \dot{x}_{1,2} = \left(\frac{m_1 g r}{j_1} - \frac{kr^2}{4j_1} \right) \sin(x_{1,1}) + \frac{kr}{2j_1} (l-b) + \frac{u_1}{j_1} + \frac{kr^2}{4j_1} \sin(x_{2,1}) \end{cases}$$

$$y_1 = x_{1,1} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{2,1} = x_{2,2} \\ \dot{x}_{2,2} = \left(\frac{m_2 g r}{j_2} - \frac{kr^2}{4j_2} \right) \sin(x_{2,1}) + \frac{kr}{2j_2} (l-b) + \frac{u_2}{j_2} + \frac{kr^2}{4j_2} \sin(x_{1,1}) \end{cases}$$

$$y_2 = x_{2,1}$$

مقادیر مربوط به پارامترهای سیستم در جدول ۱ ارائه شده است

جدول ۱: مقادیر پارامترهای سیستم (۱۸)

پارامتر	مقدار
m_1	2kg
m_2	2.5kg

j_1	0.5kg
j_2	0.625kg
k	100N/m
r	0.5m
l	0.5m
g	9.81m/s ²
b	0.4m
γ_{α_i}	10
γ_{β_i}	10
γ_{ρ_i}	20

هدف کنترلی تنظیم زوایای سیستم $x_{1,i}$ و $x_{2,i}$ در مقدار صفر می‌باشد. به منظور طراحی، ماتریس A_i به صورت زیر انتخاب شده است

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

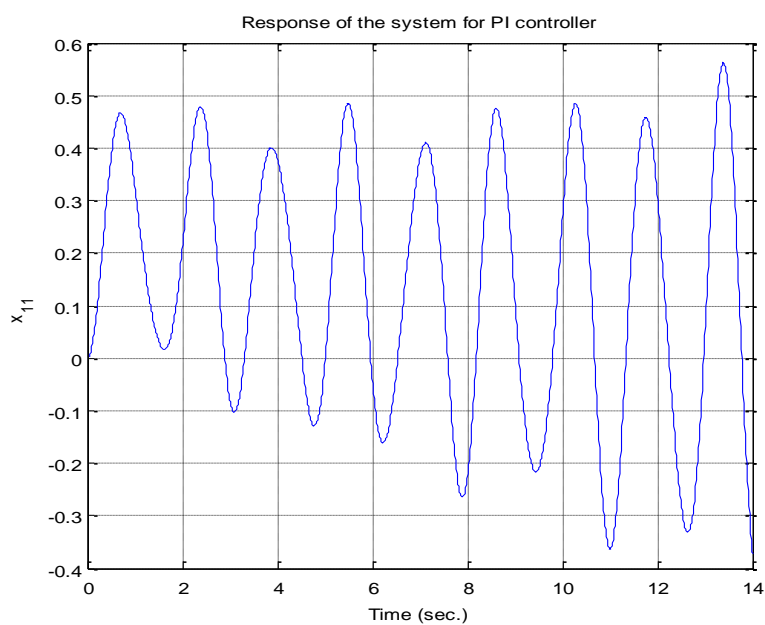
که با حل رابطه (۱۴)، ماتریس P_i به صورت زیر به دست می‌آید

$$P_i = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

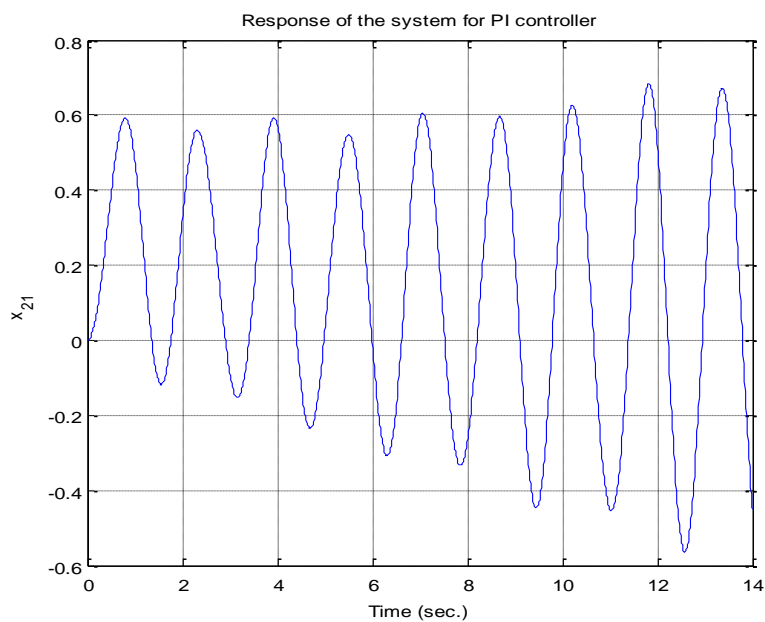
در ابتدا، سیستم تعریف شده در رابطه (۱۸) با کنترل کننده تناسبی-انتگرالی با رابطه زیر کنترل می‌شود

$$u_i = 20 \left(e_i + \frac{1}{20} \int_0^t e_i d\tau \right) \quad (21)$$

نتایج حاصل در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.

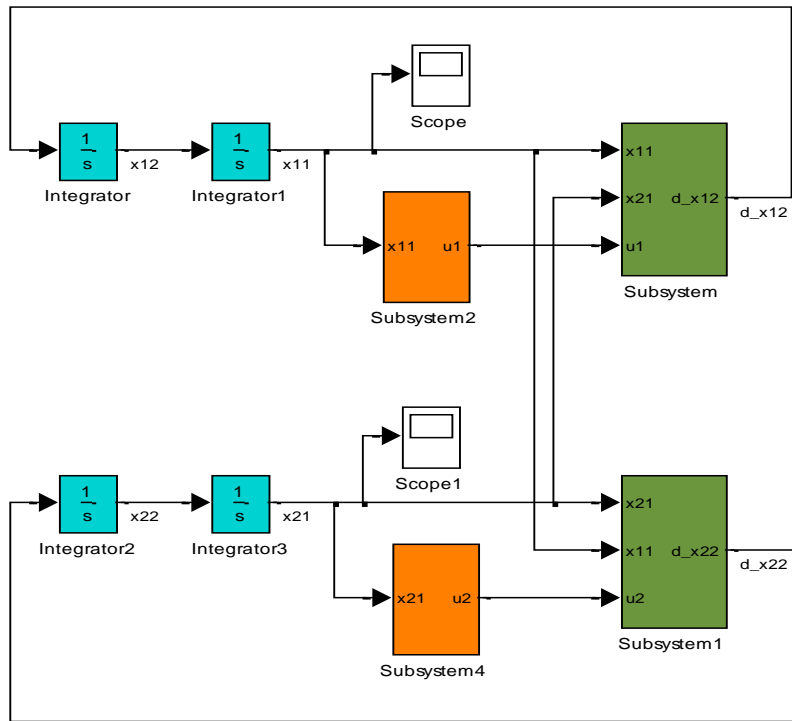


شکل ۱: پاسخ سیستم با اعمال کنترل کننده تناسبی-انتگرالی



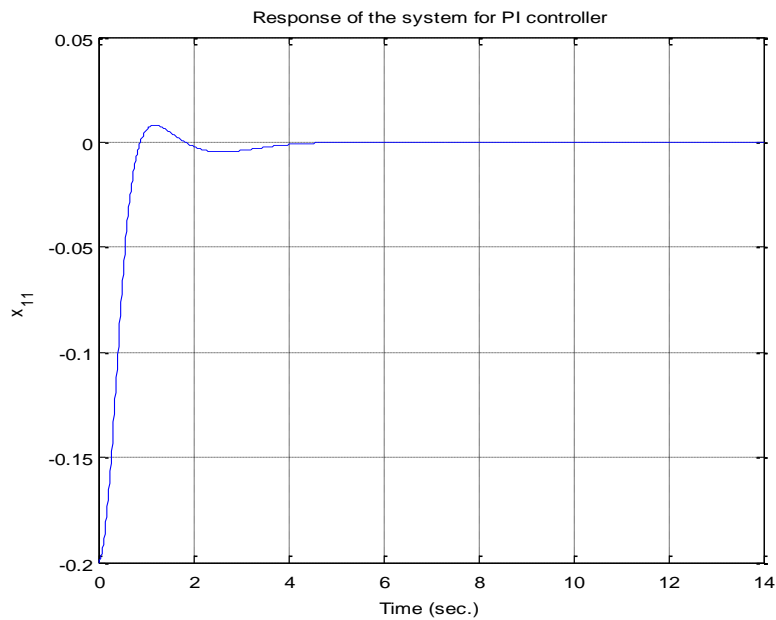
شکل ۲: پاسخ سیستم با اعمال کنترل کننده تناسبی-انتگرالی

در ادامه، شبیه سازی با اعمال روش تطبیقی صورت می گیرد. بلوک دیاگرام طراحی شده در محیط Simulink در شکل ۳ نشان داده شده است.

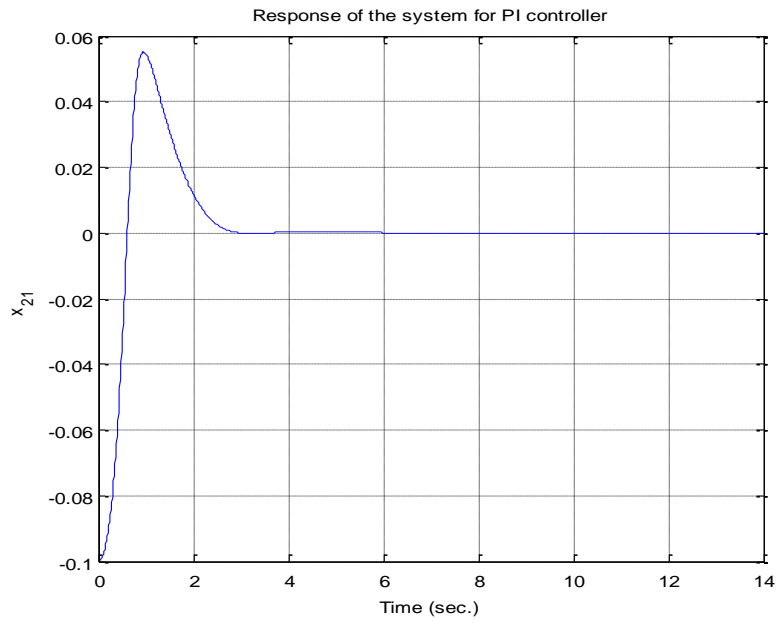


شکل ۳: بلوک دیاگرام طراحی شده در محیط Simulink

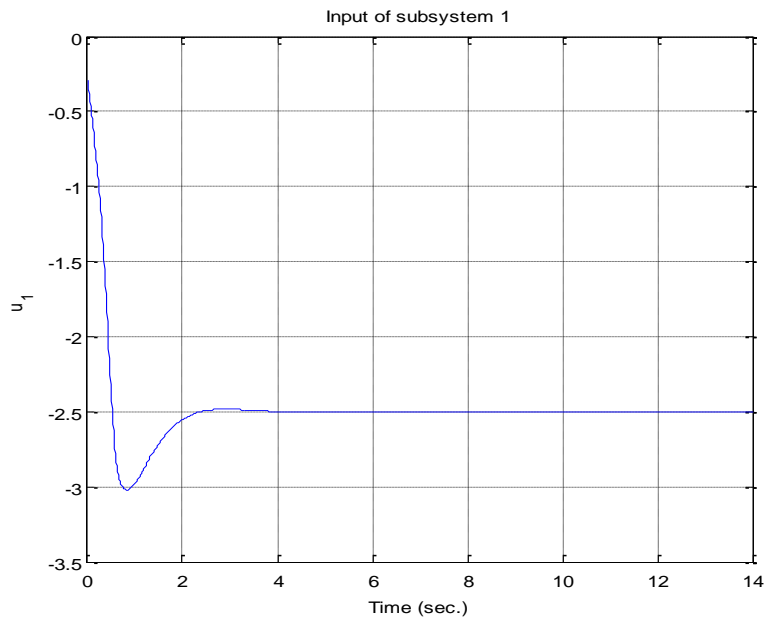
نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های ۴ الی ۱۰ نمایش داده شده‌اند.



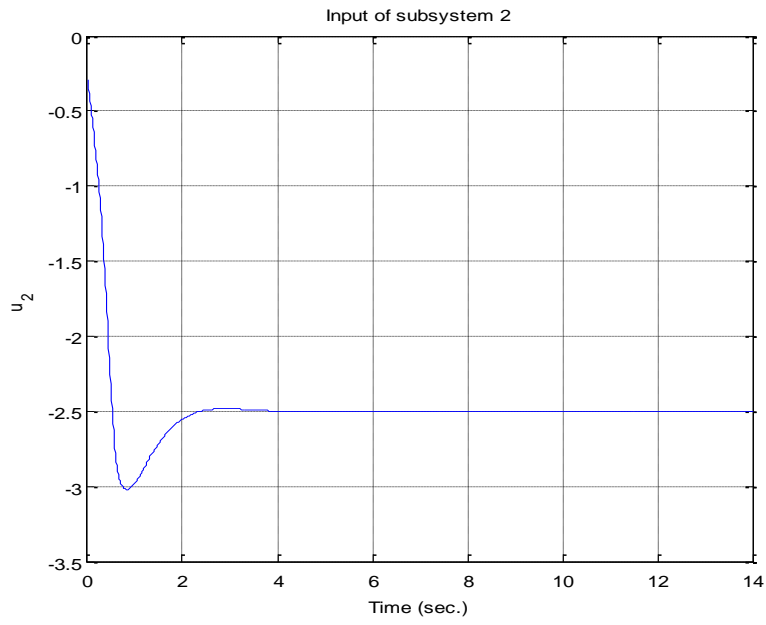
شکل ۴



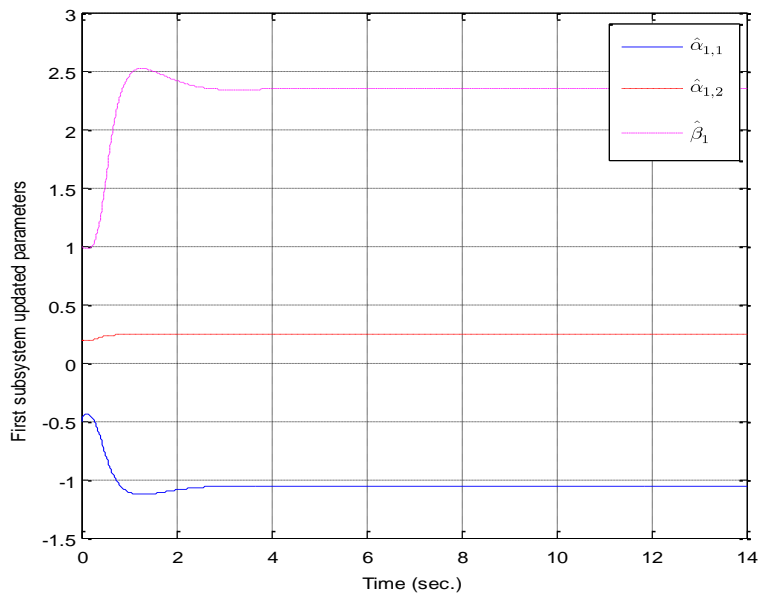
شکل ۵



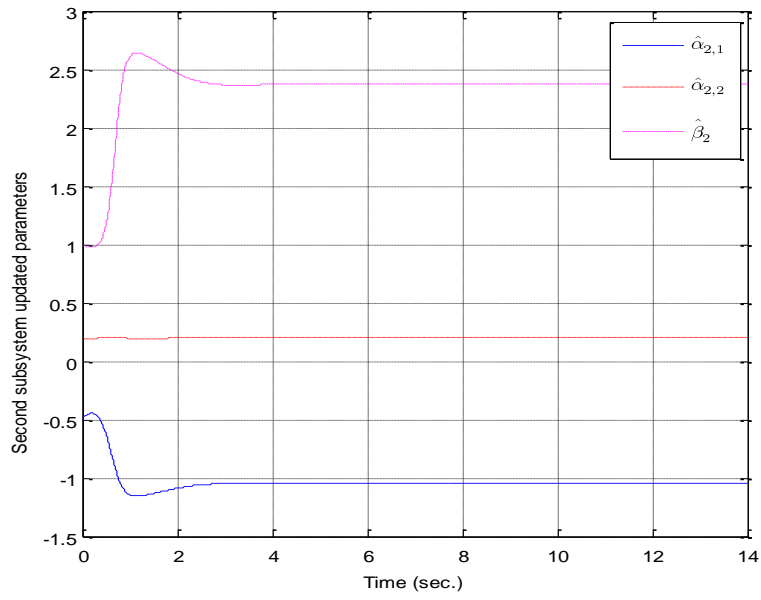
شکل ۶



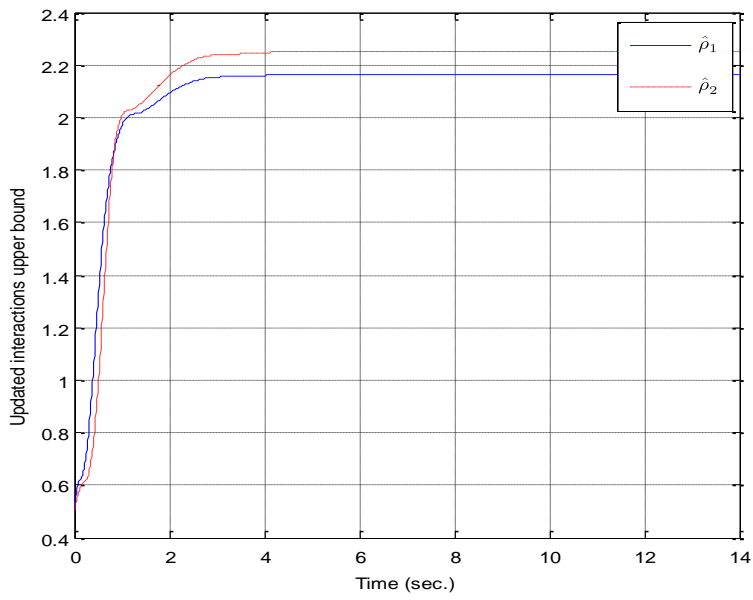
شکل ۷



شکل ۸



شکل ۹



شکل ۱۰