# کنترل فیدبک خروجی دینامیک برای کلاسی از سیستم‌های تأخیری سوئیچی با عملکرد آسنکرون

*چکیده:* مقاله حاضر مسئله پایدارسازی با استفاده از فیدبک خروجی برای کلاسی از سیستم‌های تأخیری سوئیچی با عملکرد سوئیچینگ آسنکرون را مورد بررسی قرار می‌دهد. هدف اصلی، حل مسئله برای حالتی می‌باشد که در آن سیگنال‌های کنترل کننده‌ها با تأخیر نسبت به سوئیچ سیستم تغییر می‌کنند. بر این اساس، نوآوری اصلی این مقاله ارائه شرایطی برای کنترل کننده، با استفاده از روش "زمان توقف" می‌باشد که طی آن پایداری نمایی سیستم تضمین شود. ارائه این روش با استفاده از تابع لیاپانوف صورت گرفته که با وجود افزایشی بودن این تابع در زمان سوئیچ سیستم و عدم سوئیچ کنترل کننده، پایداری نمایی سیستم برآورده می‌شود. کنترل کننده با فرض عدم وجود حالت‌های سیستم طراحی شده است که برای مقابله با آن از روش تکنیک فیدبک خروجی و رویتگر بهره گرفته شده است.

## ۱- بیان مسئله

سیستم‌های سوئیچینگ شامل مجموعه‌ای از زیرسیستم‌های متغیر با زمان و همچنین یک سیگنال سوئیچ کننده بین آن‌ها می‌باشد. چنین سیستم‌های کنترلی در کاربردهای مختلف از جمله موارد زیر وجود دارند:

- شبکه‌های مخابراتی
- کنترل ترافیک هوایی و پرواز
- بازوهای مکانیکی

وجود تأخیر در چنین سیستم‌هایی بحث پایداری آن‌ها را با چالش مواجه می‌سازد. از طرف دیگر، وجود تأخیر در تشخیص زیرسیستم فعال و به تبع آن انتخاب با تأخیر کنترل کننده مربوط به آن ( بدین مفهوم که کنترل کننده آسنکرون باشد) تضمین پایداری سیستم را با مشکل مواجه

می‌سازد. برای حل این مشکل، کارهای متفاوتی در مراجع صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

مرجع [۲۸] که در آن مسئله کنترل سوئیچی آسنکرون برای کلاسی از سیستم‌های خطی سوئیچی با زمان زمان توقف متوسط مورد بررسی قرار گرفته است. مرج [۳۰] که در آن مسئله پایداری بهره-L2 و کنترل $H_\infty$ آسنکرون برای کلاسی از سیستم‌های سوئیچی زمان گسسته بررسی شده است. مرجع [۲۴] که در آن مسئله کنترل مقاوم برای سیستم‌های سوئیچی نامعین تحت سوئیچینگ آسنکرون مطرح شده است.

در تمامی مراجع اشاره شده فرض شده است که حالت‌های سیستم برای طراحی کنترل کننده قابل اندازه‌گیری و موجود می‌باشند. اما در عمل همواره این اطلاعات در دسترس نبوده و امکان استفاده از روش‌های فوق میسر نمی‌باشد. بنابراین، هدف این مقاله حل مشکل یاد شده با فرض عدم وجود حالت‌های سیستم می‌باشد. به طور خلاصه می‌توان نوآوری‌های این مقاله را به صورت زیر بیان کرد:

- طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی برای سیستم‌های سوئیچینگ
- لحاظ کردن تأخیر در سیستم و سیگنال سوئیچ در طراحی کنترل کننده

## ۲- حل مسئله

سیستم مورد مطالعه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + E_{\sigma(t)}x(t-h), \\ x(\theta) &= \psi(\theta), \theta \in [-h, 0], \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t), \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ حالت‌های سیستم، $u \in \mathbb{R}^q$ ورودی کنترلی، $y \in \mathbb{R}^p$ خروجی اندازه‌گیری شده و $\sigma(t):[0,+\infty) \to M = \{1,2,\ldots,m\}$ سیگنال سوئیچ می‌باشد. $A_i$، $B_i$، $C_i$ و $E_i$ نیز ماتریس‌های ثابت با ابعاد مناسب می‌باشند.

برای چنین سیستمی، در صورت سنکرون بودن کنترل کننده (عدم تأخیر در انتخاب کنترل کننده)، می‌توان کنترل کننده فیدبک خروجی زیر را برای آن در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= G_{\sigma(t)}\xi(t) + L_{\sigma(t)}y(t),\\ u(t) &= K_{\sigma(t)}\xi(t).\end{aligned} \tag{۲-۲}$$

که در آن $\zeta$ حالت کنترل کننده‌ها، $G_i$، $L_i$ و $K_i$ هم ماتریس‌هاس ثابت می‌باشند.

اما در عمل، به خاطر اینکه شناسایی سیستم فعال و انتخاب کنترل‌کننده متناظر زمان‌بر خواهد بود، زمان سوئیچ کنترل‌کننده‌ها با تأخیر صورت خواهد بود که منجر به سوئیچینگ آسنکرون بین کنترل‌کننده‌ها و مدهای سیستم می‌شود.

چون هدف این مقاله لحاظ کردن آسنکرون بودن کنترل کننده می‌باشد، بنابراین فرم زیر برای کنترل کننده لحاظ می‌شود

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= G_{\sigma(t)}\xi(t) + L_{\sigma(t)}y(t),\\ u(t) &= K_{\sigma(t-\tau_d)}\xi(t),\end{aligned} \tag{۳-۲}$$

که در آن $\tau_d$ تأخیر در سوئیچ بین کنترل کننده‌ها می‌باشد.

نتایج اصلی به دست آمده در این مقاله در سه بخش ارائه می‌شود: ۱. آنالیز پایداری، ۲. شرایط ترکیب، ۳. الگوریتم طراحی.

## ۲-۱-آنالیز پایداری

با جایگذاری کنترل کننده (۲-۳) در (۲-۱) سیستم حلقه بسته به شکل زیر خواهد بود

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{\sigma(t)}\bar{x}(t) + \bar{E}_{\sigma(t)}\bar{x}(t-h) \tag{۴-۲}$$

که در آن

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} A_\sigma & B_\sigma K_{\sigma(t-\tau_d)} \\ L_\sigma C_\sigma & G_\sigma \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} E_{\sigma(t)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{۵-۲}$$

در قضیه‌ای که در این بخش ارائه می‌شود یک شرط کافی برای امکان پایدارسازی نمایی سیستم بیان شده با رابطه (۲-۴) ارائه می‌شود.

**قضیه ۱:** برای ضرایب ثابت $\alpha$ و $\beta$، اگر ماتریس‌های $P_i > 0,\ Q_i > 0,\ \forall i \in M$ باشند چنانچه داشته باشیم

$$\overline{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \overline{A}_i^T P_i + P_i \overline{A}_i + Q_i + \alpha P_i & P_i \overline{E}_i \\ * & -e^{-\alpha h} Q_i \end{bmatrix} < 0, \tag{۲-۶}$$

$$\overline{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \overline{A}_{ij}^T P_i + P_i \overline{A}_{ij} + Q_i - \beta P_i & P_i \overline{E}_i \\ * & -e^{\beta h} Q_i \end{bmatrix} < 0, \tag{۲-۷}$$

در این صورت، کنترل کننده‌های فیدبک خروجی (۲-۳) سیستم (۲-۵) را به صورت نمایی تحت سوئیچینگ آسنکرون با زمان توقف ارائه شده به صورت زیر پایدار می‌کند:

$$\tau_a \geqslant \tau_a^* = \frac{\ln \mu + (\alpha + \beta)\tau_d}{\alpha}, \tag{۲-۸}$$

که $\mu \geq 1$ شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

$$P_i \leqslant \mu P_j, \quad Q_i \leqslant \mu Q_j, \quad \forall i,\ j \in M. \tag{۲-۹}$$

**اثبات:** به خاطر تأخیر سوئیچ، زیرسیستم jام به زیرسیستم iام سوئیچ می‌کند در حالیکه کنترل‌کننده $K_j$ بعد از $\tau_d$ فعال می‌شود. بنابراین داریم:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{cases} \overline{A}_{ij}\bar{x}(t) + \overline{E}_i\bar{x}(t-h), & \forall t \in [t_i, t_i + \tau_d); \\ \overline{A}_i\bar{x}(t) + \overline{E}_i\bar{x}(t-h), & \forall t \in [t_i + \tau_d, t_{i+1}). \end{cases} \tag{۲-۱۰}$$

که در آن

$$\overline{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_j \\ L_i C_i & G_i \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_i \\ L_i C_i & G_i \end{bmatrix}.$$

برای اثبات قضیه در $\forall t \in [t_k + \tau_d, t_{k+1})$ از تابع لیاپانوف زیر استفاده شده است:

$$V_{1\sigma}(t) = \bar{x}^T(t) P_\sigma \bar{x}(t) + \int_{t-h}^{t} \bar{x}^T(s) e^{\alpha(s-t)} Q_\sigma \bar{x}(s) ds, \tag{۲-۱۱}$$

که در آن $P_i$ و $Q_i$ ماتریس‌های مثبت معین می‌باشند.

با توجه به رابطه (۲-۱۰)، خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1i} + \alpha V_{1i} = \bar{x}^T(t)[P_i\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P_i + Q_i + \alpha P_i]\bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t)P_i\bar{E}_i\bar{x}(t-h) - \bar{x}^T(t-h)e^{-\alpha h}Q_i\bar{x}(t-h)$$
$$= \zeta^T(t)\overline{\Sigma}_i\zeta(t),$$

که در آن $\zeta(t) = \left[\bar{x}^T(t) \quad \bar{x}^T(t-h)\right]^T$.

با توجه به رابطه (۲-۶) داریم

$$\dot{V}_{1i} + \alpha V_{1i} \leqslant 0. \qquad (۲-۱۲)$$

زمانیکه $\forall t \in [t_k, t_k + \tau_d)$ کاندید لیاپانوف زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$V_{2\sigma}(t) = \bar{x}^T(t)P_\sigma\bar{x}(t) + \int_{t-h}^{t} \bar{x}^T(s)e^{\beta(t-s)}Q_\sigma\bar{x}(s)ds, \qquad (۲-۱۳)$$

که در آن $P_i$ و $Q_i$ ماتریس‌های مثبت معین می‌باشند.

با توجه به رابطه (۲-۱۰) داریم

$$\dot{V}_{2i} - \beta V_{2i} = \bar{x}^T(t)[P_i\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ij}^T P_i + Q_i - \beta P_i]\bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t)P_i\bar{E}_i\bar{x}(t-h) - \bar{x}^T(t-h)e^{\beta h}Q_i\bar{x}(t-h)$$
$$\leqslant \zeta^T(t)\overline{\Pi}_i\zeta(t).$$

با درنظر گرفتن (۲-۷) داریم

$$\dot{V}_{2i} - \beta V_{2i} \leqslant 0. \qquad (۲-۱۴)$$

به وضوح داریم

$$\int_{t-h}^{t} \bar{x}^T(s)e^{\alpha(s-t)}Q_i\bar{x}(s)ds \leqslant \int_{t-h}^{t} \bar{x}^T(s)Q_i\bar{x}(s)ds \leqslant \int_{t-h}^{t} \bar{x}^T(s)e^{\beta(t-s)}Q_i\bar{x}(s)ds, \qquad (۲-۱۵)$$

با ترکیب روابط (۲-۱۱)، (۲-۱۳) و (۲-۱۵) داریم

$$V_{1i}(t) \leqslant V_{2i}(t). \tag{۱۶-۲}$$

با لحاظ کردن کل بازه زمانی $[t_0,t)$، تابع لیاپانوف زیر لحاظ می‌شود:

$$V(t) = \begin{cases} V_{1\sigma}(t), & t \in [t_k+\tau_d, t_{k+1}), \quad k=0,1,2,\cdots; \\ V_{2\sigma}(t), & t \in [t_k, t_k+\tau_d), \quad k=0,1,2,\cdots. \end{cases} \tag{۱۷-۲}$$

برای $t \in [t_k+\tau_d, t_{k+1})$، انتگرال‌گیری دو طرف رابطه (۲-۱۲)، از $t_k+\tau_d$ تا $t$ و استفاده از روابط (۲-۴)، (۲-۹) و (۲-۱۶) داریم

$$\begin{aligned} V(t) &\leqslant e^{-\alpha(t-(t_k+\tau_d))} V_{1i}((t_k+\tau_d)^+) \\ &\leqslant e^{-\alpha(t-(t_k+\tau_d))} V_{2i}((t_k+\tau_d)^-) \\ &\leqslant e^{-\alpha(t-(t_k+\tau_d))} e^{\beta\tau_d} V_{2i}(t_k^+) \\ &\leqslant \mu e^{-\alpha(t-(t_k+\tau_d))} e^{\beta\tau_d} V_{2i}(t_k^+) \\ &\leqslant \dots \\ &\leqslant \mu^k e^{(k+1)\beta\tau_d} e^{-\alpha[t-t_0-(k+1)\tau_d]} V(t_0) \\ &\leqslant e^{(\alpha+\beta)\tau_d} e^{\left[\frac{\ln\mu+(\alpha+\beta)\tau_d}{\tau_a}-\alpha\right](t-t_0)} V(t_0). \end{aligned} \tag{۱۸-۲}$$

به طور مشابه برای بازه $t \in [t_k, t_k+\tau_d)$ داریم

$$\begin{aligned} V(t) &\leqslant e^{\beta(t-t_k)} V_{2i}(t_k^+) \\ &\leqslant \mu e^{\beta(t-t_k)} V_{1i}(t_k^-) \\ &\leqslant \mu e^{\beta\tau_d} e^{-\alpha(t_k-t_{k-1}-\tau_d)} V_{1i}((t_{k-1}+\tau_d)^-) \\ &\leqslant \dots \\ &\leqslant \mu^k e^{(k+1)\beta\tau_d} e^{-\alpha[t-t_0-(k+1)\tau_d]} V(t_0) \\ &\leqslant e^{(\alpha+\beta)\tau_d} e^{\left[\frac{\ln\mu+(\alpha+\beta)\tau_d}{\tau_a}-\alpha\right](t-t_0)} V(t_0). \end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

با توجه به رابطه (۲-۱۱) و (۲-۱۳) داریم

$$\begin{aligned} a\|\bar{x}(t)\|^2 \leqslant V_{1i}(t) \leqslant b\|\bar{x}(t)\|^2, \quad t \in [t_k+\tau_d, t_{k+1}); \\ a\|\bar{x}(t)\|^2 \leqslant V_{2i}(t) \leqslant b\|\bar{x}(t)\|^2, \quad t \in [t_k, t_k+\tau_d), \end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

جاییکه

$$a = \min_{\forall i \in M}\{\lambda_{\min}(P_i)\}, \quad b = \max\{b_1, b_2\},$$

و همچنین

$$b_1 = \max_{\forall i \in M}\{\lambda_{\max}(P_i)\} + h\max_{\forall i \in M}\{\lambda_{\max}(Q_i)\},$$
$$b_2 = \max_{\forall i \in M}\{\lambda_{\max}(P_i)\} + he^{\beta h}\max_{\forall i \in M}\{\lambda_{\max}(Q_i)\}.$$

بنابراین، با به کارگیری روابط (۲-۱۸) تا (۲-۲۰) داریم

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{b}{a}} e^{\frac{(\alpha+\beta)\tau_d}{2}} e^{[\frac{\ln\mu+(\alpha+\beta)\tau_d}{2\tau_a}-\frac{\alpha}{2}](t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{۲-۲۱}$$

و بنابراین سیستم به صورت نمایی پایدار می‌باشد.

## ۲-۲-شرایط ترکیب

در قضیه این بخش شرایط LMI (Linear Matrix Inequality) که برای طراحی کنترل کننده لازم می‌باشد ارائه می‌شود:

**قضیه ۲:** با وجود اعداد مثبت $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$، اگر ماتریس‌های متقارن $X_i$، $Y_i$، $T_i$، $Z_i$ و ماتریس‌های $\hat{A}_i$، $\hat{B}_i$، $\hat{C}_i$، $\hat{A}_{ij}$ چنانچه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ * & Y_i \end{bmatrix} > 0, \tag{۲-۲۲}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & A_i + \widehat{A}_i^T + \gamma X_i + \alpha I & E_i & 0 & X_i \\ * & \Omega_i + \alpha Y_i & Y_i E_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha h}\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -e^{-\alpha h} T_i & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \tag{۲-۲۳}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij} & A_i + \hat{A}_{ij}^T + \gamma X_i - \beta I & E_i & 0 & X_i \\ * & \Omega_i - \beta Y_i & Y_i E_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{\beta h}\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -e^{\beta h} T_j & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \tag{۲-۲۴}$$

برقرار می‌باشند، جاییکه

$$\Xi_i = A_iX_i + X_iA_i^T + B_i\widehat{C}_i + \widehat{C}_i^TB_i^T + \alpha X_i + Z_i,$$
$$\Omega_i = Y_iA_i + \widehat{B}_iC_i + A_i^TY_i + C_i^T\widehat{B}_i^T + \gamma I,$$
$$\Xi_{ij} = A_iX_i + X_iA_i^T + B_i\widehat{C}_j + \widehat{C}_j^TB_i^T - \beta X_i + Z_j,$$

بنابراین کنترل کننده فیدبک خروجی طراحی شده در رابطه (۲-۳) باعث پایداری نمایی سیستم می‌شود به طوریکه پارامترهای کنترلی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} K_i &= \widehat{C}_i(M_i^T)^{-1}, \\ L_i &= N_i^{-1}\widehat{B}_i, \\ G_i &= N_i^{-1}(\widehat{A}_i - Y_iA_iX_i - N_iL_iC_iX_i - Y_iB_iK_iM_i^T)(M_i^T)^{-1}, \end{aligned} \tag{۲-۲۵}$$

که $M_i$ و $N_i$ شرط زیر را برآورده می‌سازد

$$M_iN_i^T = I - X_iY_i, \tag{۲-۲۶}$$

و $\mu \geq 1$ شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

$$R_i^{-1}S_i \leqslant \mu R_j^{-1}S_j, \quad T_i \leqslant \mu T_j \tag{۲-۲۷}$$

با

$$R_i = \begin{bmatrix} X_i & I \\ M_i^T & 0 \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & N_i^T \end{bmatrix}, \quad \forall i,\ j \in M.$$

**اثبات:** برای اثبات، ماتریس زیر تعریف می‌شود:

$$P_i = \begin{bmatrix} Y_i & N_i \\ N_i^T & W_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2),$$

در ابتدا نشان داده می‌شود که نامساوی ماتریسی (۲-۶) معادل با LMI (۲-۲۳) می‌باشد.

با ضرب طرفین رابطه (۲-۶) در $diag\left\{R_i^T, I\right\}$ و $diag\left\{R, I\right\}$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} R_i^T\overline{A}_i^T P_i R_i + R_i^T P_i \overline{A}_i R_i + R_i^T Q_i R_i + \alpha R_i^T P_i R_i & R_i^T P_i \overline{E}_i \\ * & -e^{-\alpha h} Q_i \end{bmatrix} < 0. \qquad (۲۸-۲)$$

با انجام محاسبات ساده خواهیم داشت:

$$R_i^T P_i \overline{A}_i R_i = \begin{bmatrix} A_i X_i + B_i K_i M_i^T & A_i \\ Y_i A_i X_i + N_i L_i C_i X_i + Y_i B_i K_i M_i^T + N_i G_i M_i^T & Y_i A + N_i L_i C_i \end{bmatrix},$$

$$R_i^T P_i \overline{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ Y_i E_i & 0 \end{bmatrix}, \quad R_i^T P_i R_i = S_i^T R_i = \begin{bmatrix} X_i & I \\ Y_i X_i + N_i M_i^T & Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix},$$

$$R_i^T Q_i R_i = \begin{bmatrix} \gamma X_i X_i + M_i T_i M_i^T & \gamma X_i \\ \gamma X_i & \gamma I \end{bmatrix}.$$

با تعریف تبدیل‌های زیر

$$\begin{aligned} &\widehat{A}_i = Y_i A_i X_i + N_i L_i C_i X_i + Y_i B_i K_i M_i^T + N_i G_i M_i^T, \\ &\widehat{B}_i = N_i L_i, \quad \widehat{C}_i = K_i M_i^T, \quad Z_i = M_i T_i M_i^T. \end{aligned} \qquad (۲۹-۲)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۹) داریم

$$\begin{bmatrix} \Xi_i + \gamma X_i X_i & \widehat{A}_i^T + A_i + \alpha I + \gamma X_i & E_i & 0 \\ * & \Omega_i & Y_i E_i & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha h}\gamma I & 0 \\ * & * & * & -e^{-\alpha h} T_i \end{bmatrix} < 0. \qquad (۳۰-۲)$$

بنابراین رابطه (۲-۶) معادل (۲-۲۳) می‌باشد.

حال با ضرب طرفین رابطه (۲-۷) در $diag\left\{R_i^T, I\right\}$ و $diag\left\{R, I\right\}$ داریم

$$\begin{bmatrix} R_i^T\overline{A}_{ij}^T P_i R_i + R_i^T P_i \overline{A}_{ij} R_i + R_i^T Q_i R_i - \beta R_i^T P_i R_i & R_i^T P_i \overline{E}_i \\ * & -e^{\beta h} Q_i \end{bmatrix} < 0. \qquad (۳۱-۲)$$

و بنابراین داریم

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij} + \gamma X_i X_i & \widehat{A}_{ij}^T + A_i - \beta I + \gamma X_i & E_i & 0 \\ * & \Omega_i - \beta Y_i & Y_i E_i & 0 \\ * & * & -e^{\beta h}\gamma I & 0 \\ * & * & * & -e^{\beta h} T_j \end{bmatrix} < 0, \qquad (۳۲-۲)$$

جاییکه

$$\widehat{A}_{ij} = Y_i A_i X_i + N_i L_i C_i X_i + Y_i B_i K_j M_j^T + N_i G_i M_j^T,$$
$$\widehat{C}_j = K_j M_j^T, \quad Z_j = M_j T_j M_j^T. \qquad (۳۳-۲)$$

و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که رابطه (۲-۷) معادل با (۲-۲۴) می‌باشد.

## ۲-۳-الگوریتم

بر اساس قضیه ۲ ارائه شده، گام‌های زیر برای طراحی کنترل کننده ارائه می‌شوند:

- با داشتن $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$، حل LMIهای (۲-۲۲) تا (۲-۲۴) برای به دست آوردن $X_i$، $Y_i$، $T_i$، $Z_i$، $\hat{A}_i$، $\hat{B}_i$، $\hat{C}_i$.
- سپس بدست آوردن ماتریس‌های $M_i$ و $N_i$ با استفاده از (۲-۲۶) و (۲-۲۹).
- محاسبه ماتریس‌های $K_i$، $L_i$ و $G_i$ با توجه به (۲-۲۵).
- با استفاده از $P_i = R_i^{-1} S_i$، $Q_i = diag\{\gamma I, T_i\}$، محاسبه $X_i$ با بکارگیری روش بهینه‌سازی $\mu$

$$s.t. \quad P_i \leqslant \mu P_j, Q_i \leqslant \mu Q_j, \forall i,j \in M. \qquad (۳۴-۲)$$

- محاسبه زمان توقف بر اساس رابطه (۲-۸).

# ۳- نتایج شبیه‌سازی

شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار Matlab و محیط Simulink صورت گرفته است. سیستم‌های درنظر گرفته شده به صورت زیر می‌باشند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9 & 0.2 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad h = 0.4.$$

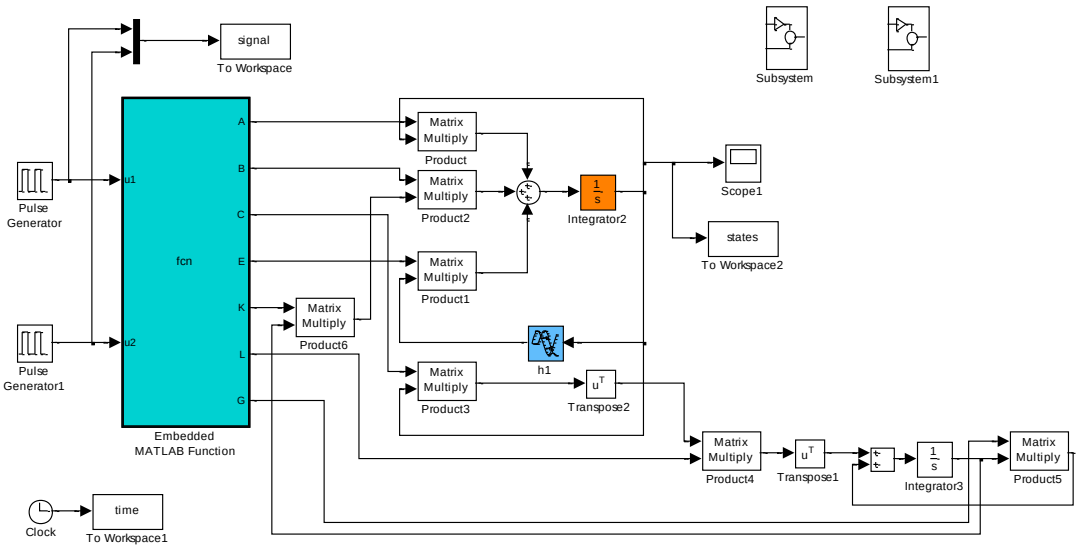
و بهره‌های کنترلی به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -591.1 & 1308.3 \\ 67.6 & -328.1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -41.2284 & 20.5746 \\ -0.7735 & -821.4389 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.2648 & 0.2835 \\ 0.0948 & 2.9816 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 2.8610 & 0 \\ 0 & 0.8379 \end{bmatrix}, \qquad (۱-۳)$$

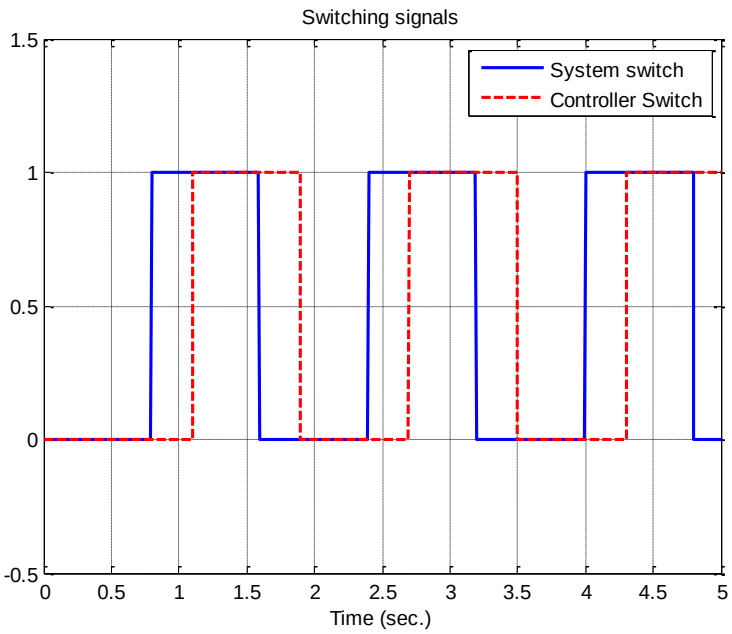
$$G_1 = \begin{bmatrix} -309.6939 & -4.2060 \\ 2.9895 & -315.8485 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} -310.3264 & 0.2892 \\ -0.7896 & -316.2327 \end{bmatrix}.$$

بلوک دیاگرام طراحی شده در محیط Simulink نرم‌افزار Matlab در شکل ۳-۱ نمایش داده شده است.



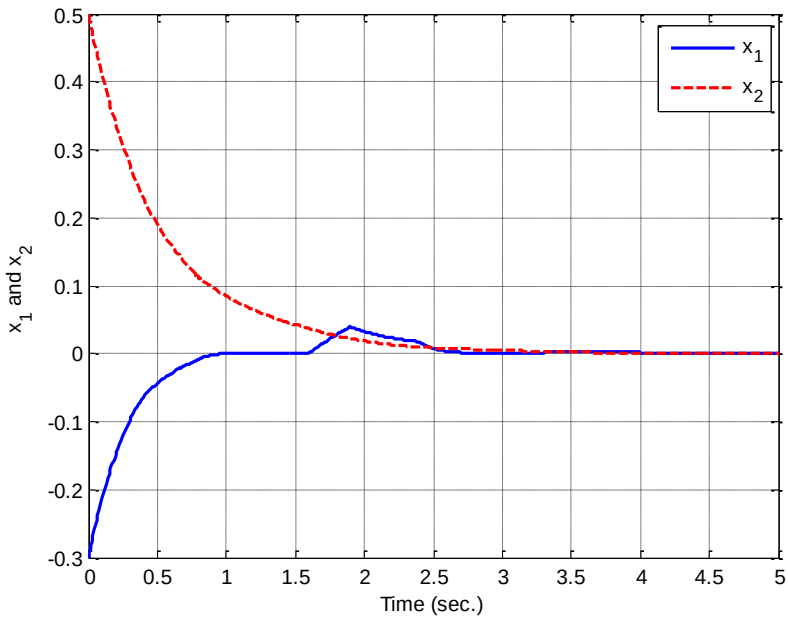

**شکل ۳-۱**

سیگنال‌های سوئیچ در شکل ۳-۲ نشان داده شده‌اند.




**شکل ۳-۲**

حالت‌های سیستم در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.




**شکل ۳-۳**