به نام خدا:

در این مقاله آرامش محدب مسائل بهینه سازی دودویی-مستمر و حل عددی آنها با روش نیوتن نیمه هموار بحث شده است. چارچوب پیشنهادی به ویژه برای مسایل کنترل بهینه دارای معادلات با مشتقات جزئی تحت قید سوئیچینگ عملکرد مناسبی دارد. مسئله کنترل بهینه در مقاله فوق از دو رویکرد سهمی گون و بیضی گون برای حل مسایل استفاده نموده است.

در مسئله، هدف حل معادله زیر می باشد، که در برنامه های switchingcontrol_par.m و switchingcontrol_ell.m به حل آن پرداخته شده است.

در مفهوم کنترل معادلات دیفرانسیل، کنترل سوییچینگ به مسئله ای اطلاق می شود که در آن با وجود دو کنترل تنها یکی از آنها در هر نقطه از زمان فعال می باشد که مسئله ای چالش بر انگیز به علت ماهیت دوگانه پیوسته- گسسته آن می باشد. برای شروع اولیه،معادله دیفرانسیل جزئی سهمیگون $Ly = Bu$ بر $\Omega_T := [0,T] \times \Omega,$ را در نظر بگیرید که در آن $L = \partial_t - A$ و A یک عملگر بیضی گون بر $\Omega \subset \mathbb{R}^n,$ و B $(Bu)(t,x) = \chi_{\omega_1}(x)u_1(t) + \chi_{\omega_2}(x)u_2(t)$ می باشد. برای تسریع ساختار سویچینگ یک تابع دودویی پیشنهاد می شود.

$$|v|_0 := \begin{cases} 1 & \text{if } v \neq 0, \\ 0 & \text{if } v = 0, \end{cases}$$

$$g(v) = \frac{\alpha}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \beta |v_1 v_2|_0$$

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^2)} \frac{1}{2}\|y - z\|^2_{L^2(\omega_T)} + \int_0^T g(u(t))\,dt, \\ \text{s.t.} \quad Ly = Bu. \end{cases}$$

در مقاله،۶ حالت زیر برای سوئیچینگ در نظر گرفته شده است:

(i) $w \subset Q_1$: In this case, the subdifferential inclusion (3.3) yields $v_1 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_1$ and $v_2 = w_2$; solving for w_1, w_2 and inserting the result into the definition of Q_1 yields

$$w = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_1, v_2\right) \quad \text{and} \quad |v_1| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})|v_2|, \quad |v_2| < \sqrt{2\alpha\beta}.$$

(ii) $w \subset Q_2$: In this case, $v_1 = w_1$ and $v_2 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_2$, and as in case (i) we have that

$$w = \left(v_1, \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_2\right) \quad \text{and} \quad |v_2| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})|v_1|, \quad |v_1| < \sqrt{2\alpha\beta}.$$

(iii) $w \in Q_0$: In this case, $v_1 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_1$ and $v_2 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_2$, and hence

$$w = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_1, \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_2\right) \quad \text{and} \quad |v_1| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}, \quad |v_2| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}.$$

(iv) $w \in Q_{10}$: In this case, $v_1 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_1$ and $v_2 \in [w_2, (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_2]$. Since $\text{sign}(w_2) = \text{sign}(v_2)$, we have from the definition of Q_{10} that $w_2 = \text{sign}(v_2)\sqrt{2\alpha\beta}$. Hence

$$w = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_1, \text{sign}(v_2)\sqrt{2\alpha\beta}\right) \quad \text{and} \quad \sqrt{2\alpha\beta} \le |v_2| \le (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}, \quad |v_1| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}.$$

(v) $w \subset Q_{20}$: In this case, $v_2 = (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_2$ and $v_1 \subset [w_1, (1 + \frac{\gamma}{\alpha})w_1]$. As in (iv), we have that

$$w = \left(\text{sign}(v_1)\sqrt{2\alpha\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}v_2\right) \quad \text{and} \quad \sqrt{2\alpha\beta} \le |v_1| \le (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}, \quad |v_2| > (1+\frac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}.$$

(vi) $w \in Q_{12}$: In this case, $[w_1, (1+\frac{\gamma}{\alpha})w_1]$ and $v_2 \in [w_2, (1+\frac{\gamma}{\alpha})w_2]$. This does not yield an explicit value for w, although the definition of Q_{12} implies that $|w_1| = |w_2| \le \sqrt{2\alpha\beta}$. We therefore turn to the equivalent characterization of w via the proximal mapping

برنامه های مرتبط با این شش حالت:

```
As(:,1) = (abs(q1) > (1+gamma/alpha)*abs(q2)) & (abs(q2) < sqab);
        As(:,2) = (abs(q2) > (1+gamma/alpha)*abs(q1)) & (abs(q1) < sqab);
        As(:,3) = (abs(q1) > (1+gamma/alpha)*sqab) & (abs(q2) >
(1+gamma/alpha)*sqab);
        As(:,4) = (sqab <= abs(q1)) & (abs(q1) <= (1+gamma/alpha)*sqab) & ...
            (abs(q2) > (1+gamma/alpha)*sqab);
        As(:,5) = (sqab <= abs(q2)) & (abs(q2) <= (1+gamma/alpha)*sqab) & ...
            (abs(q1) > (1+gamma/alpha)*sqab);
        As(:,6) = (sqab <= abs(q1)) & (abs(q1) <= (1+gamma/alpha)*sqab) & ...
            (sqab <= abs(q2)) & (abs(q2) <= (1+gamma/alpha)*sqab) & ...
            ((abs(q1)+abs(q2)) > (2+gamma/alpha)*sqab);
```

خلاصه شده این عبارات و برنامه نوشته شده متناسب با آنها در زیر آمده است:

$$
(\partial g^*)_\gamma(q) = \begin{cases}
\left(\frac{1}{\alpha+\gamma}q_1, 0\right) & \text{if } q \in Q_1^\gamma, \\
\left(0, \frac{1}{\alpha+\gamma}q_2\right) & \text{if } q \in Q_2^\gamma, \\
\left(\frac{1}{\alpha+\gamma}q_1, \frac{1}{\alpha+\gamma}q_2\right) & \text{if } q \in Q_0^\gamma, \\
\left(\frac{1}{\alpha+\gamma}q_1, \frac{1}{\gamma}\left(q_2 - \text{sign}(q_2)\sqrt{2\alpha\beta}\right)\right) & \text{if } q \in Q_{10}^\gamma, \\
\left(\frac{1}{\gamma}\left(q_1 - \text{sign}(q_1)\sqrt{2\alpha\beta}\right), \frac{1}{\alpha+\gamma}q_2,\right) & \text{if } q \in Q_{20}^\gamma, \\
\left(\frac{1}{\gamma}\left(q_1 - \text{sign}(q_1)\sqrt{2\alpha\beta}\right), \frac{1}{\gamma}\left(q_2 - \text{sign}(q_2)\sqrt{2\alpha\beta}\right)\right) & \text{if } q \in Q_{00}^\gamma, \\
\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2\alpha+\gamma}q_1 - \text{sign}(q_1)\frac{\alpha}{2\alpha+\gamma}|q_2|\right), \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2\alpha+\gamma}q_2 - \text{sign}(q_2)\frac{\alpha}{2\alpha+\gamma}|q_1|\right)\right) & \text{if } q \in Q_{12}^\gamma,
\end{cases}
$$

where

$$
Q_1^\gamma = \left\{q : |q_1| > (1+\tfrac{\gamma}{\alpha})|q_2| \text{ and } |q_2| < \sqrt{2\alpha\beta}\right\},
$$

$$
Q_2^\gamma = \left\{q : |q_2| > (1+\tfrac{\gamma}{\alpha})|q_1| \text{ and } |q_1| < \sqrt{2\alpha\beta}\right\},
$$

$$
Q_0^\gamma = \left\{q : |q_1|, |q_2| > (1+\tfrac{\gamma}{\alpha})\sqrt{2\alpha\beta}\right\},
$$

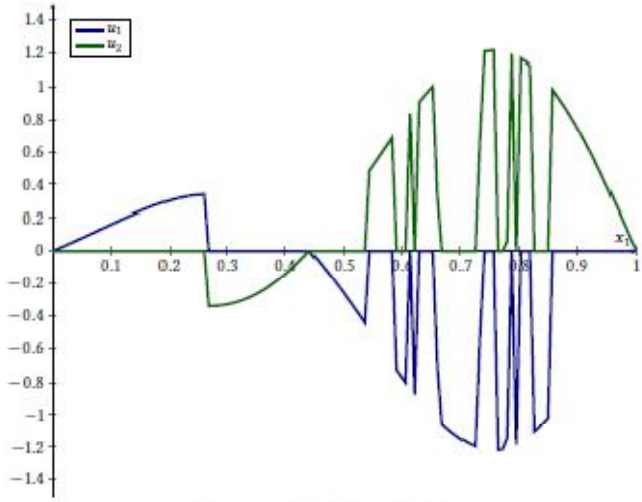
```
  Hg = [1/(alpha+gamma)*(As(:,1)+As(:,3)+As(:,4)).*q1 + ...
            1/gamma*(As(:,5)+As(:,6)).*(q1-sign(q1)*sqab) + ...
            1/(gamma*(2*alpha+gamma))*As(:,7).*((alpha+gamma)*q1-
alpha*sign(q1).*abs(q2)); ...
            1/(alpha+gamma)*(As(:,2)+As(:,3)+As(:,5)).*q2 + ...
            1/gamma*(As(:,4)+As(:,6)).*(q2-sign(q2)*sqab) + ...
            1/(gamma*(2*alpha+gamma))*As(:,7).*((alpha+gamma)*q2-
alpha*sign(q2).*abs(q1))];
```

در زیر نتایج شبیه سازی مربوط به مقاله و شبیه سازی های انجام شده برای هر دو حالت نمایش داده می شود:

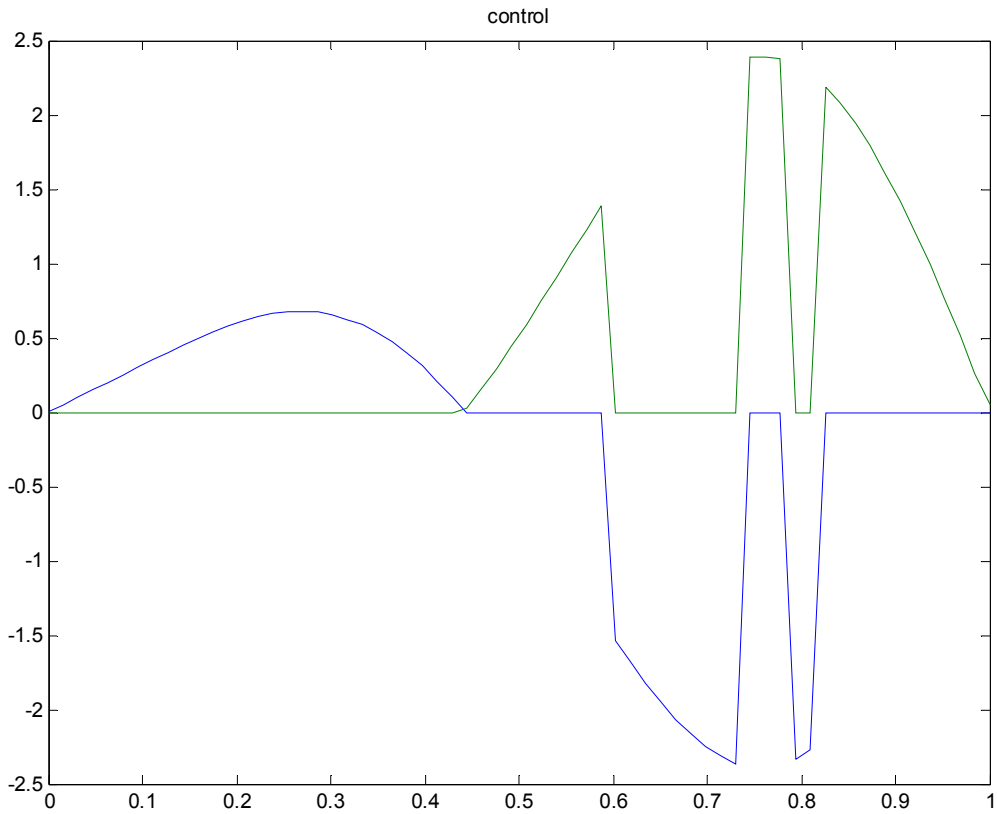
شایان ذکر است که در شبیه سازی های انجام شده تعداد نقاط شبکه ۶۴ عدد در نظر گرفته شده است ولیکن در صورتی که ۱۲۸ در نظر گرفته شود، کمی زمان پردازش بیشتر بوده ولیکن جوابها به جواب مقاله بسیار شبیه تر می باشد.

حالت بیضوی:

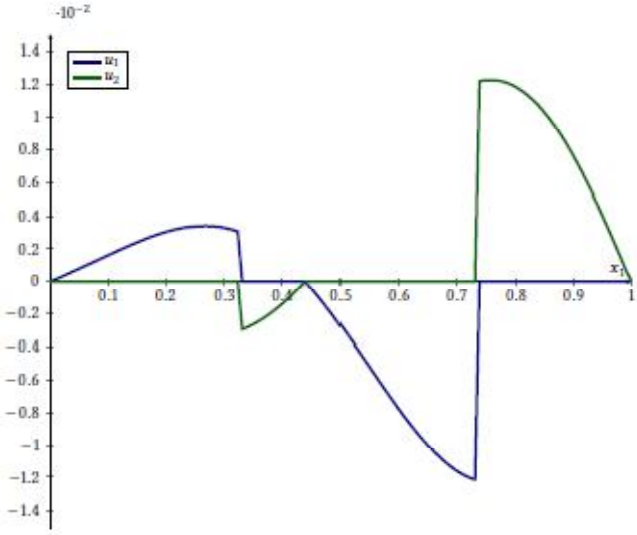
۱) $\alpha = 10^{-5}, \beta = 10^{-3}$



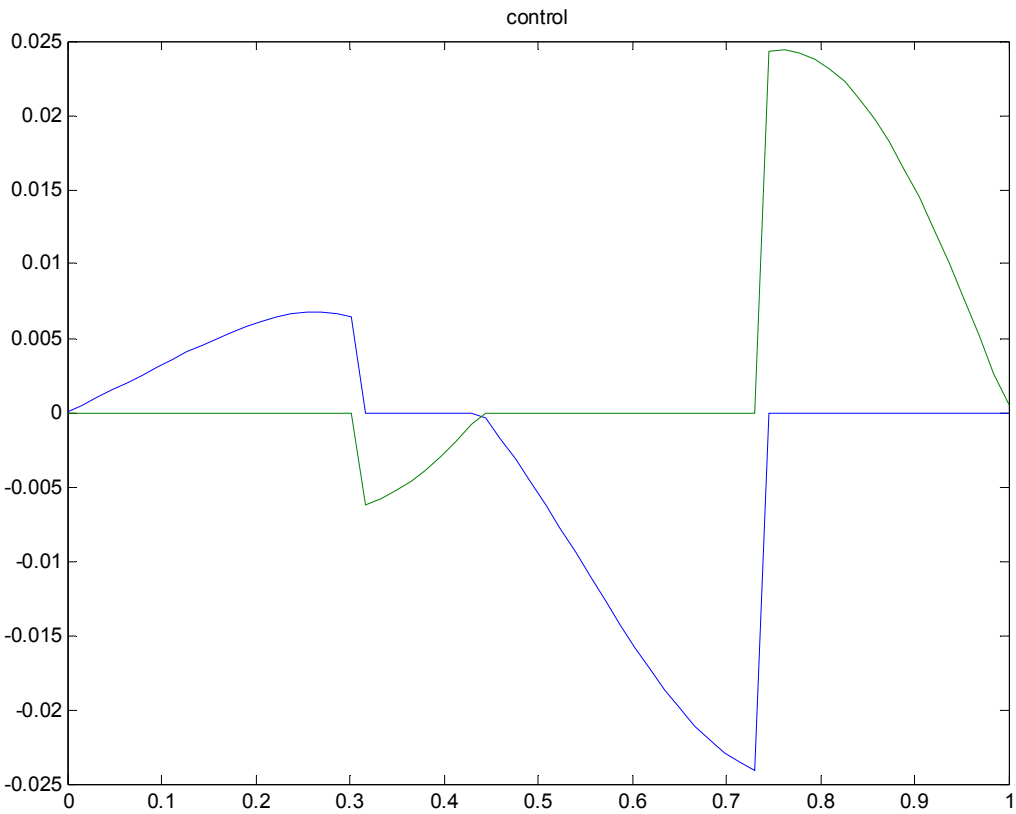
(c) $\alpha = 10^{-5}, \beta = 10^{-3}$



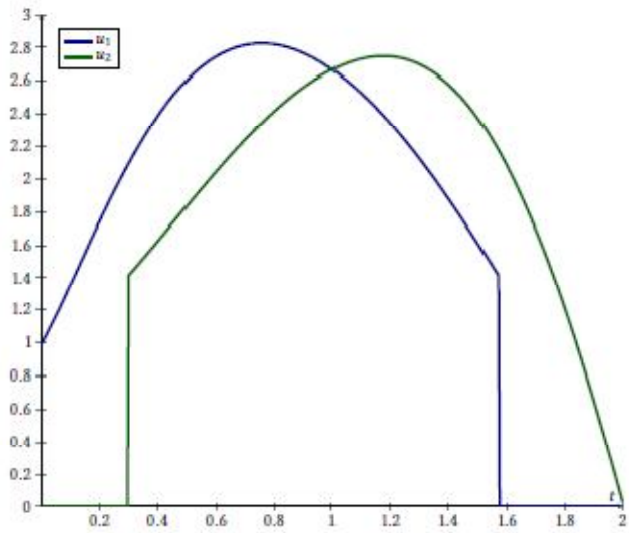
$\alpha = 10^{-3}, \beta = 10^{-3}$ ۲)



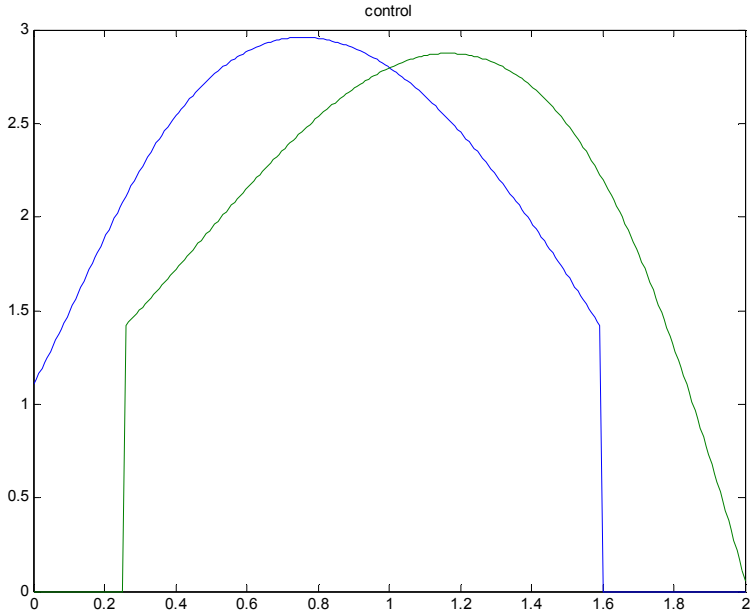
(a) $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 10^{-3}$



حالت سهمی گون:



(b) $\alpha = 10^{-1}$, $\beta = 10^{-1}$



مشاهده می شود که در تمامی موارد الگوریتم شبیه سازی شده به خوبی عمل می کند و نتایجی شبیه به مقاله حاصل می گردد.