به نام خدا

بخش اول: الگوریتم‌های LQR و SDRE

در این بخش در مورد الگوریتم‌های LQR و SDRE توضیحاتی ارائه می‌گردد و شباهت‌ها و تفاوت‌های دو روش ذکر می‌شوند. هدف از این دو روش کنترلی، یافتن ورودی‌های کنترلی u^* است که با اعمال آن به سیستم تحت کنترل (۱)، ضمن پایدار شدن سیستم و ارضا شدن قیود تعریف شده برای آن، تابع هزینه تعریف شده (معادله (۲)) مینیمم شود و ضمنا متغیرهای حالت سیستم با کم‌ترین تلاش کنترلی به سمت صفر همگرا گردند.

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)\mathrm{u}(\mathrm{t}) \qquad (۱)$$

$$J\left(x,u,t\right) = \frac{1}{2}x^T(\mathrm{t}_f)Hx(\mathrm{t}_f) + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{1}{2}x^T(\mathrm{t})\mathrm{Q}\,x(\mathrm{t}) + \frac{1}{2}u^T(\mathrm{t})Ru(\mathrm{t})\right\}dt \qquad (۲)$$

در (۲)، H و Q ماتریس‌های وزنی متقارن مثبت و R نیز ماتریس وزنی مثبت اکیدا مثبت می‌باشند. در روش LQR، ماتریس‌های A(x) و B(x) ثابت فرض می‌شوند و دیگر تابعی از حالت سیستم (x) نیستند ولی در روش SDRE این دو ماتریس تابعی از حالت سیستم (x) می‌باشند. در نتیجه روش LQR خطی و روش SDRE غیرخطی می‌باشد. هم‌چنین در هر دو روش، فرم کلی ورودی کنترلی از (۳) محاسبه می‌شود:

$$u^* = -R^{-1}B^T(x)\mathrm{Kx} \qquad (۳)$$

در (۳)، K ضرایب لاگرانژ است و از حل یک معادله ریکاتی به دست می‌آید. حل این معادله ریکاتی در دو روش LQR و SDRE متفاوت است. در روش LQR معادله ریکاتی (۴) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که با روش‌های عددی از زمان نهایی شبیه‌سازی به زمان اولیه (با داشتن مقادیر نهایی K) به دست می‌آید:

$$\dot{K} = -KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK \qquad (۴)$$

در روش SDRE، طرف چپ معادله (۴) برابر صفر قرار داده می‌شود (معادله جبری ریکاتی –معادله (۵)-) و معادله جبری به دست آمده با داشتن مقادیر اولیه متغیرهای حالت، از زمان اولیه شبیه‌سازی تا زمان نهایی حل می‌گردد.

$$0 = -KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK \qquad (۵)$$

بخش دوم: برنامه‌های MATLAB دو روش LQR و SDRE

طبق روش توضیح داده شده برای الگوریتم هر یک از دو روش، یک کد MATLAB برای آن‌ها نوشته شد. با ارائه یک مثال ساده به بررسی کاربرد دو برنامه نوشته شده می‌پردازیم. فرض کنیم قصد کنترل سیستم غیرخطی زیر را داریم:

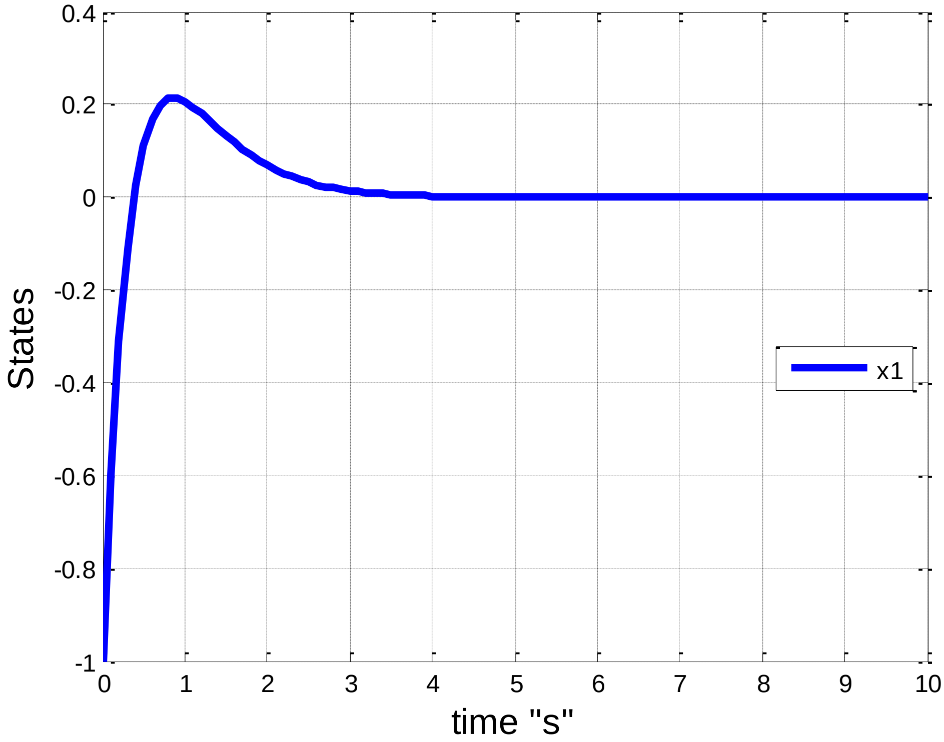
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) & x_2 \\ \cos(x_1) & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

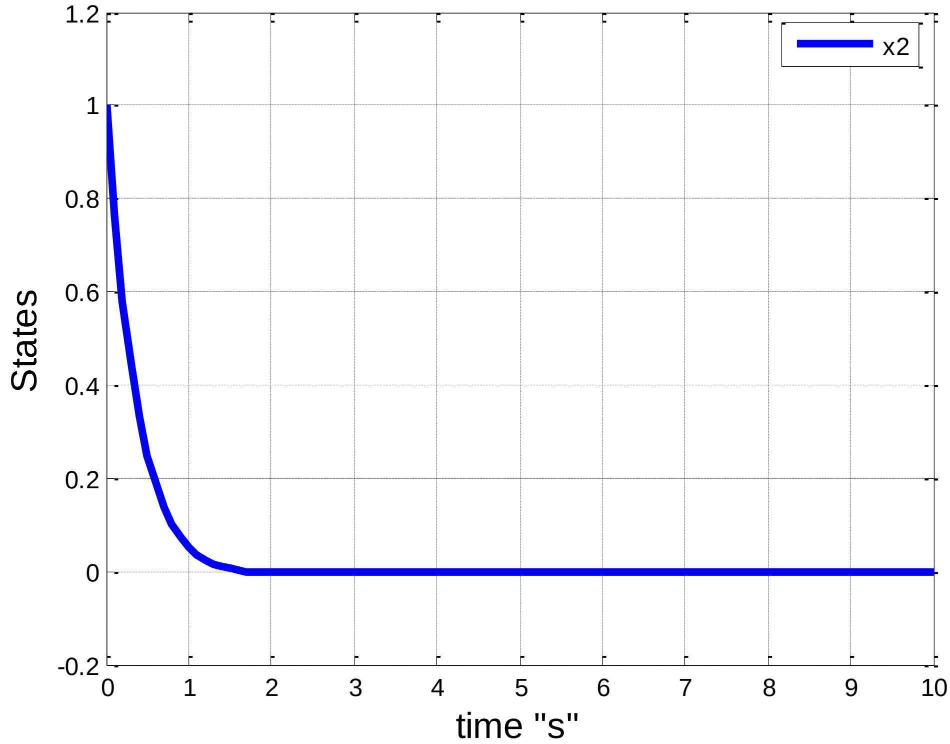
در نتیجه A(x) برابر با $\begin{bmatrix} \sin(x_1) & x_2 \\ \cos(x_1) & 2 \end{bmatrix}$ و B(x) نیز معادل $\begin{bmatrix} x_1 x_2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است. هم‌چنین دو متغیر حالت و دو ورودی کنترلی داریم. از این فرم غیرخطی برای روش SDRE استفاده می‌گردد ولی برای LQR نیازمند خطی‌سازی دو ماتریس A(x) و B(x) حول یک نقطه تعادل می‌باشیم. فرض کنیم نقطه تعادل را معادل $x_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 0 \quad u_1^0 = 0 \quad u_2^0 = 0$ در نظر می‌گیریم و بالانویس 0 به معنای نقطه تعادل می‌باشد. با خطی-سازی این این نقطه تعادل خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} -1.3818 & 2 \\ 0.5403 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

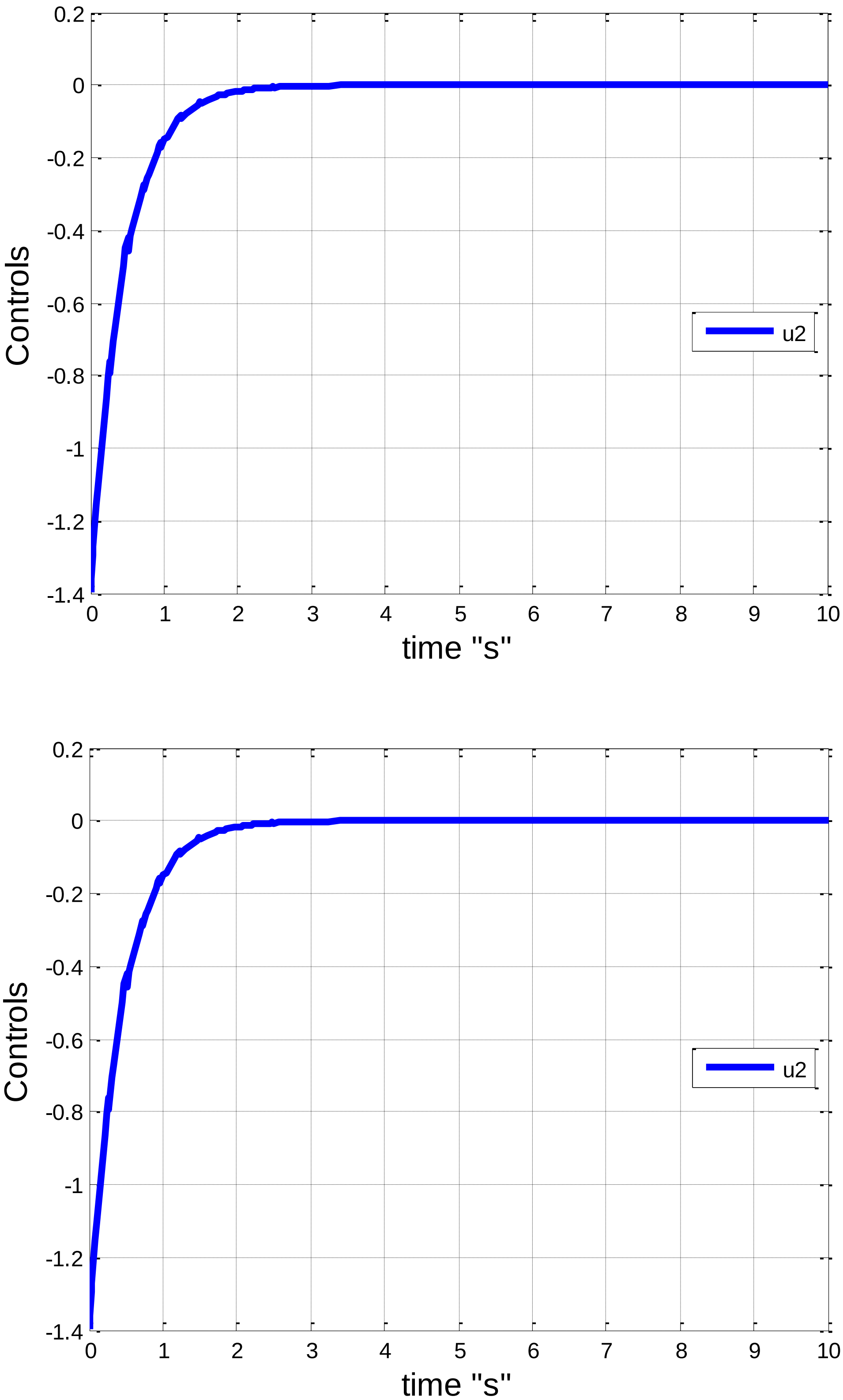
با وارد کردن ورودی‌های هر یک از این دو سیستم غیرخطی و خطی شده به ترتیب در فایل‌های SDRE_Inputs.m و LQR_Inputs.m و اجرای هر یک از روش‌های SDRE و LQR به ترتیب از فایل‌های SDRE_main.m و LQR_main.m نتایج شبیه‌سازی مطابق زیر به دست می‌آیند.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی LQR (برای سیستم خطی شده):



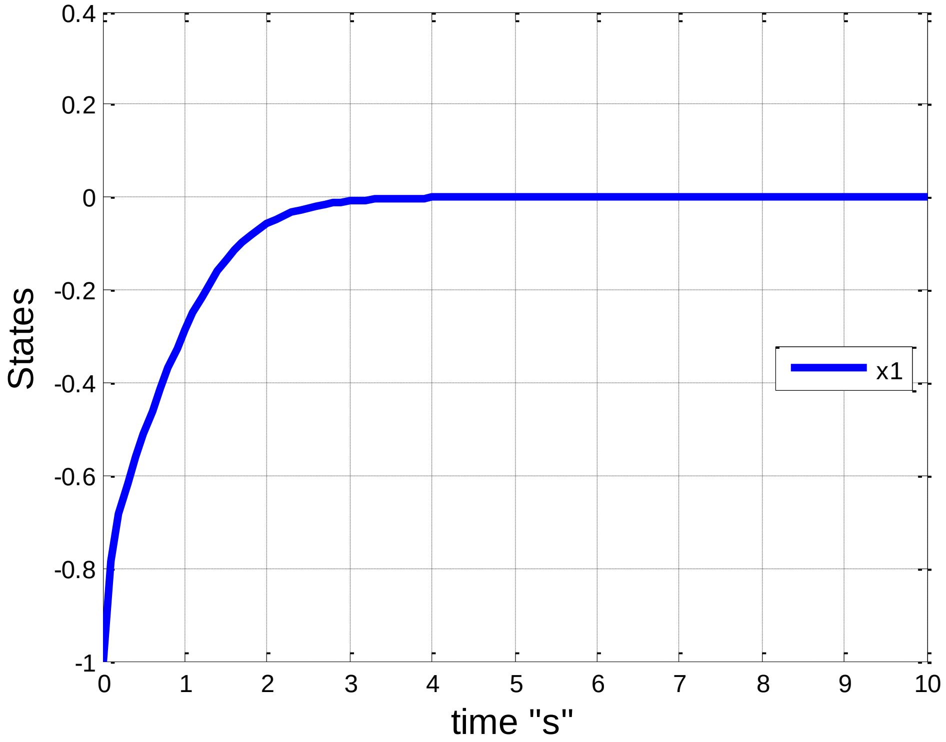


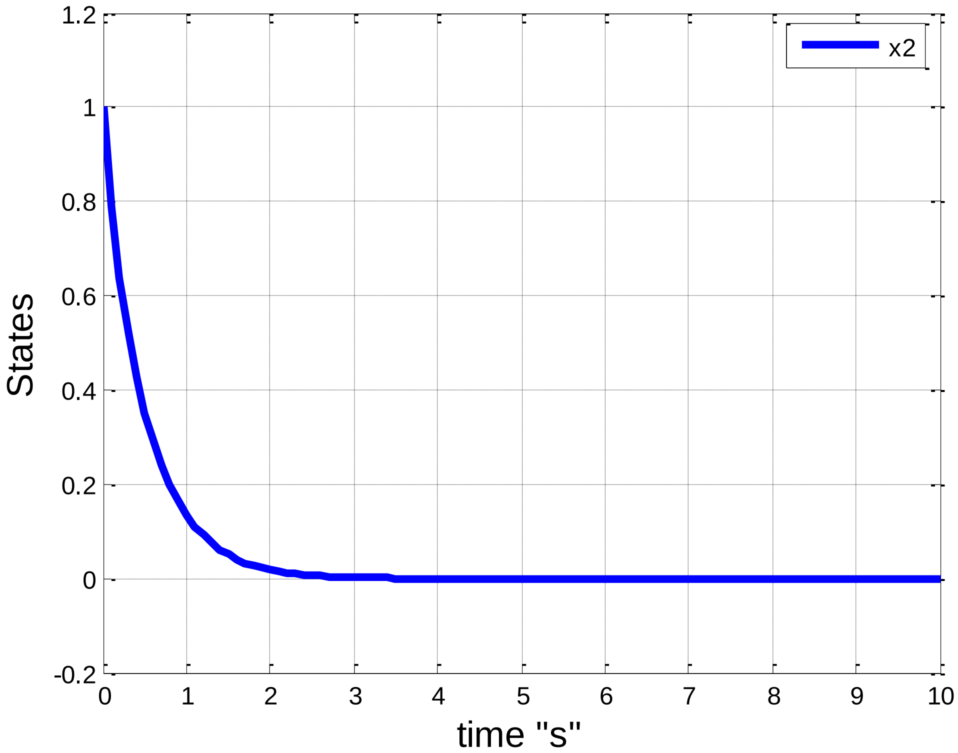
شکل ۱: متغیر های حالت از شبیه‌سازی LQR



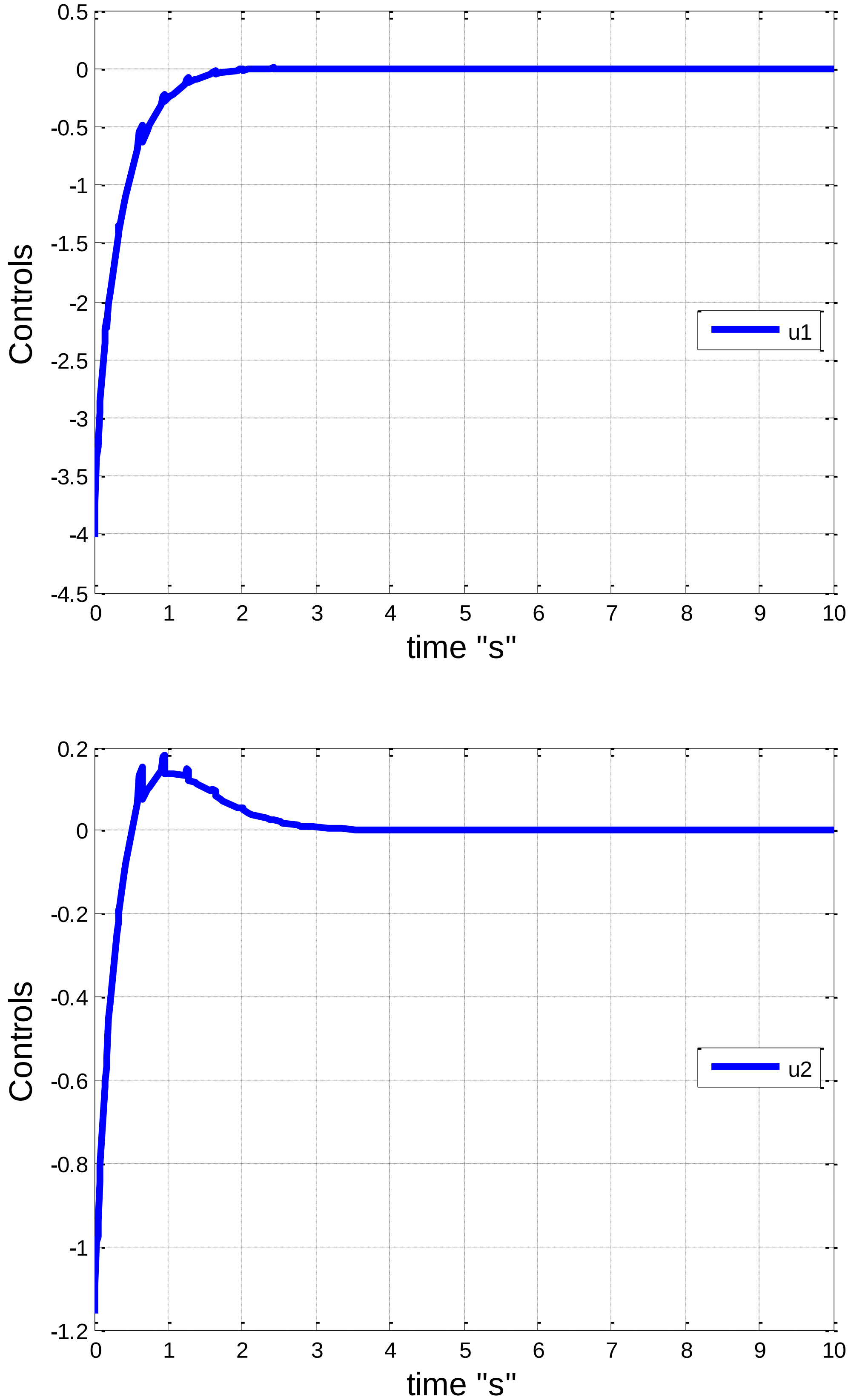
شکل ۲: ورودی‌های کنترلی از شبیه‌سازی LQR

نتایج حاصل از شبیه‌سازی SDRE (برای سیستم غیرخطی)





شکل ۳: متغیر های حالت از شبیه‌سازی SDRE



شکل ۴: ورودی‌های کنترلی از شبیه‌سازی SDRE

مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده از دو روش خیلی به یک‌دیگر شباهت دارند.

بخش سوم: کنترل ربات دریایی

در این بخش به کنترل ربات دریایی طبق توضیحات ارائه داده شده در بخش دوم پرداخته می‌شود. ماتریس‌های A(x) و B(x) به کمک اطلاعات موجود در مقاله

State-dependent Riccati equation-based robust dive plane control of AUV with control constraints

به دست می‌آید. چهار متغیر حالت برای شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است که عبارتند از:

θ (pitch angle) ،z (depth) ،q (pitch rate) ،w (heavy velocity)

ماتریس‌های A(x) و B(x) پس از جایگذاری مقادیر ثابت در ادامه مشاهده می‌شوند:

$$A(x)=\begin{bmatrix} -57.2-131|w| & 55.74-0.632|q|+0.5974q & 0 & -7\dfrac{\cos(\theta)}{\theta} \\ 48+3.18|w| & -4-188|q|-0.5974\mathrm{w} & 0 & -5.8604\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \\ \cos(\theta) & 0 & 0 & -2\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

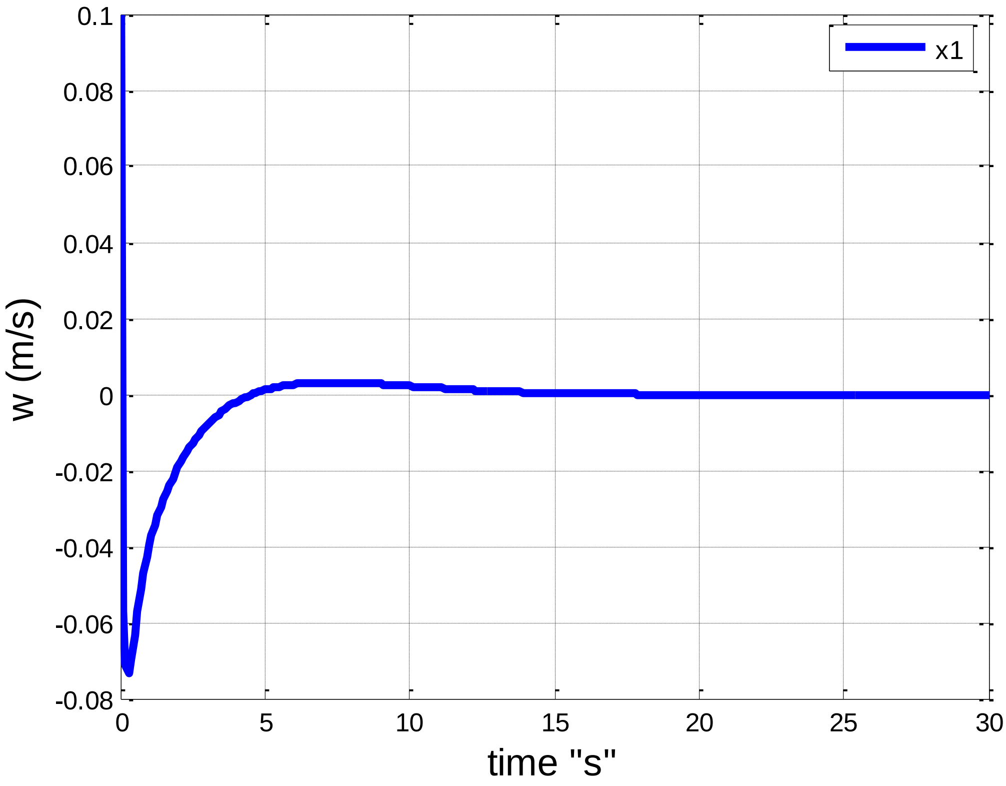
$$B(x)=\begin{bmatrix}-0.2884 & -2.8864 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

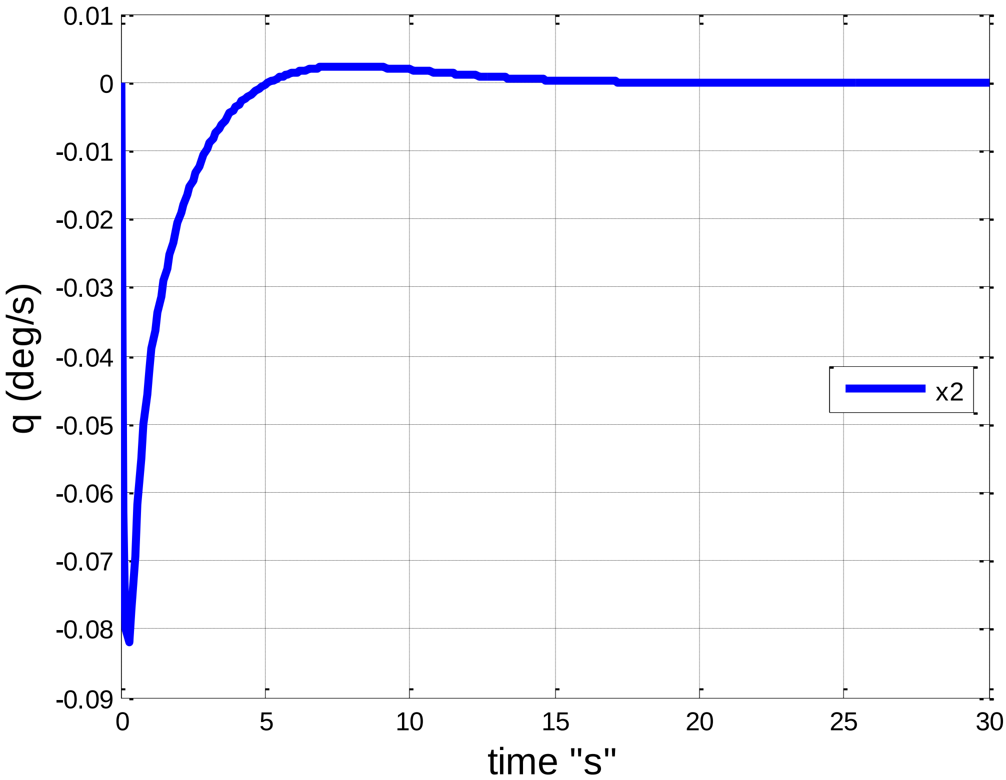
از این فرم ماتریس‌ها برای استفاده در کد SDRE و از خطی شده آن‌ها برای LQR استفاده می‌گردد. فرم خطی شده ماتریس A(x) عبارت است از (مقدار z تعادل برابر با ۱ متر و مقادیر تعادل سایر متغیرهای حالت صفر هستند):

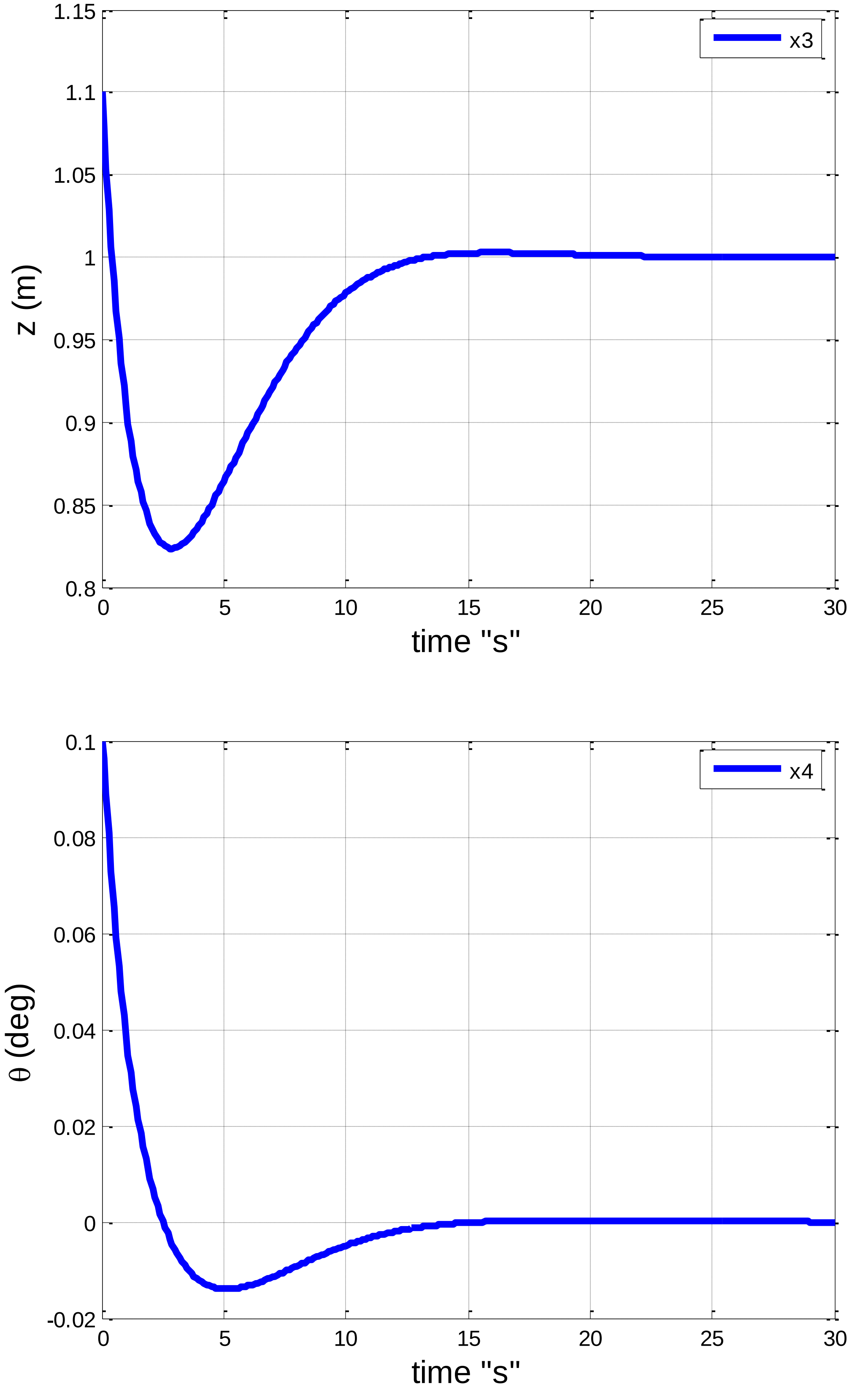
$$A=\begin{bmatrix} -57.2 & 55.74 & 0 & 0 \\ 48 & -4 & 0 & -5.8604 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

$$B=\begin{bmatrix}-0.2884 & -2.8864 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

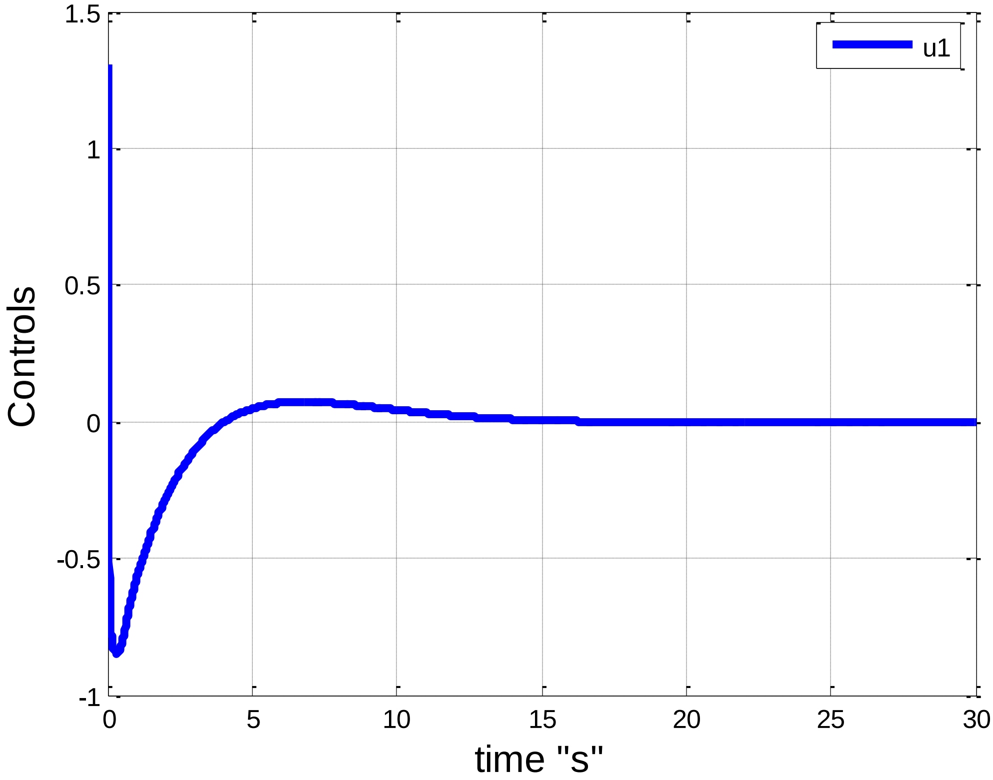
نتایج حاصل از شبیه‌سازی SDRE (برای سیستم غیرخطی)





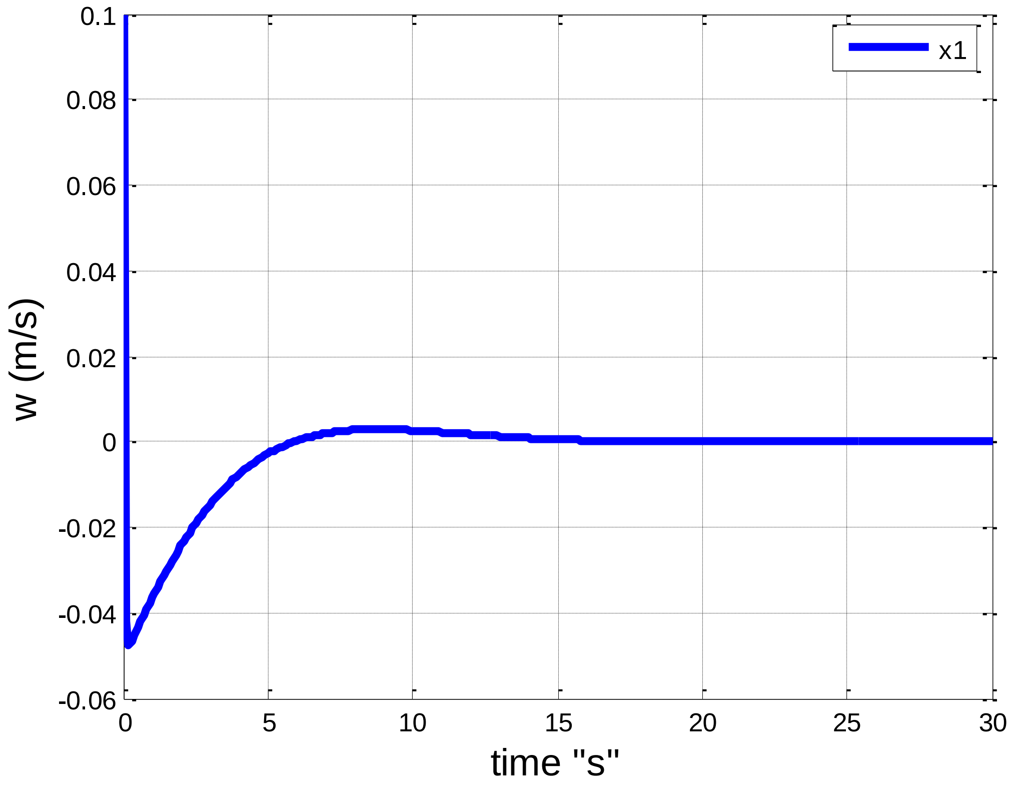


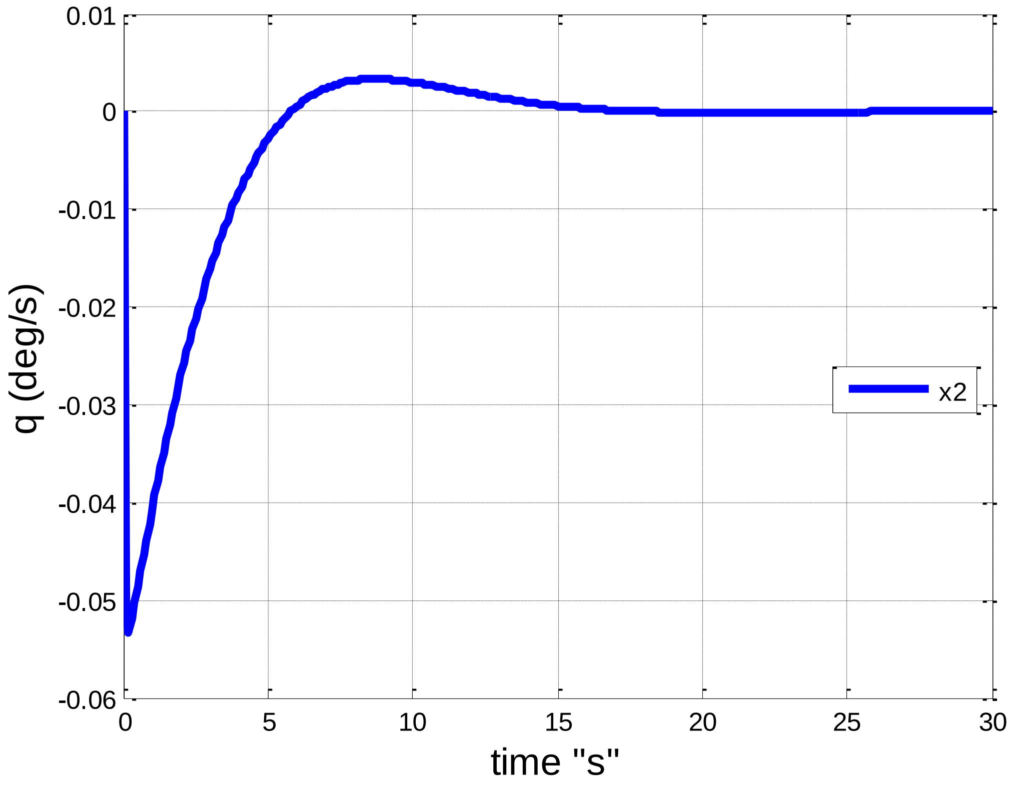
شکل ۴: متغیرهای حالت ربات از شبیه‌سازی SDRE

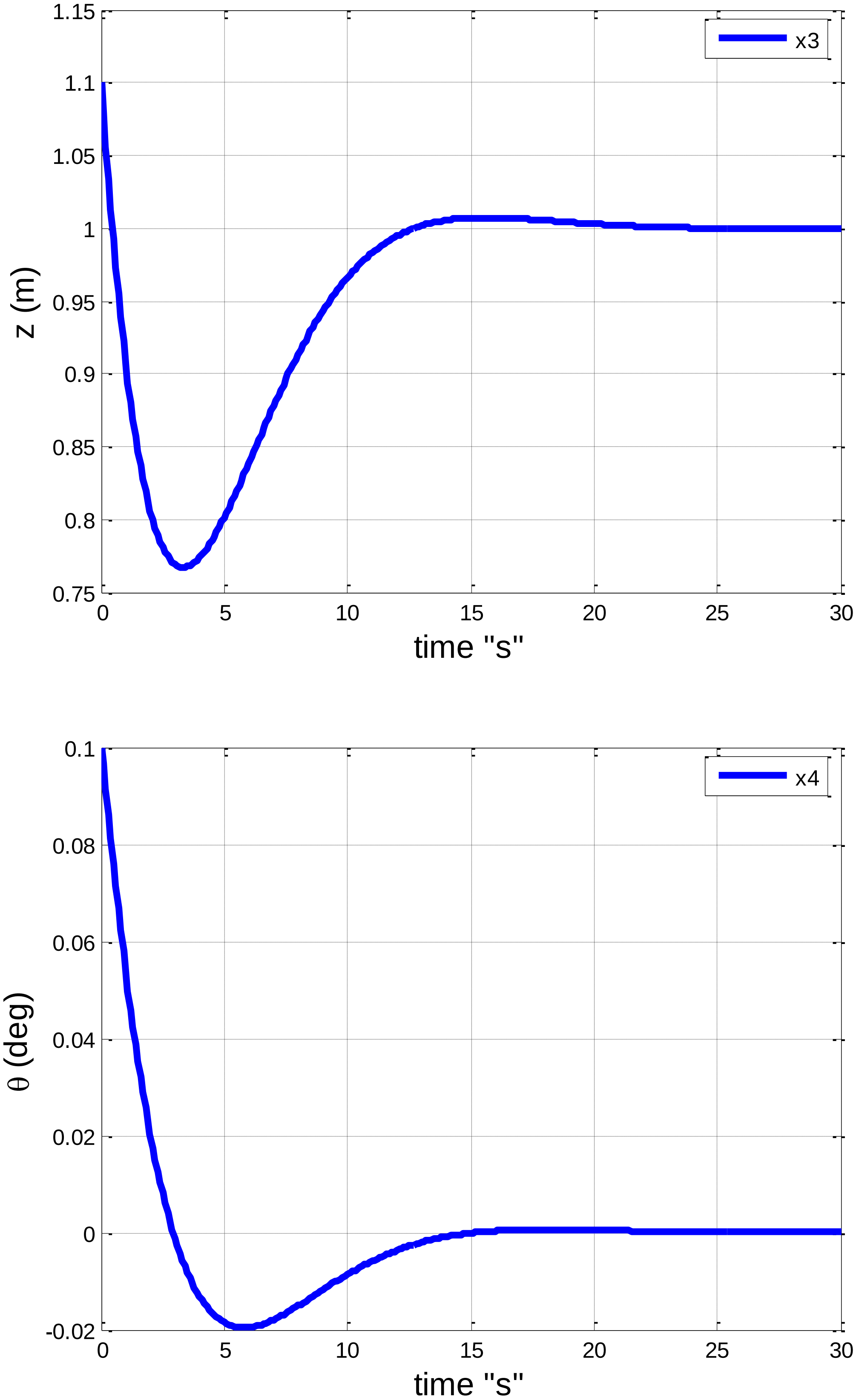


شکل ۵: ورودی کنترلی ربات از شبیه‌سازی SDRE

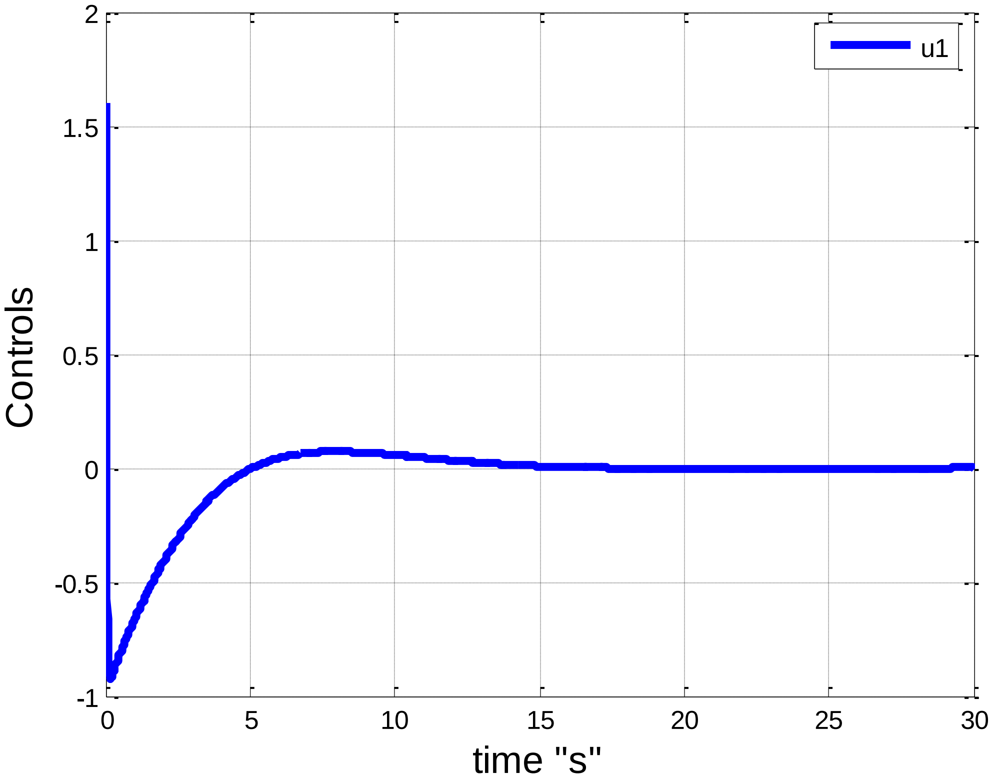
نتایج حاصل از شبیه‌سازی LQR (برای سیستم خطی شده)







شکل ۶: متغیرهای حالت ربات از شبیه‌سازی SDRE



شکل ۷: ورودی کنترلی ربات از شبیه‌سازی LQR