

## کنترل لغزشی - تطبیقی سیستم فوق آشوب لورنز با در نظر گرفتن عدم قطعیت، اغتشاش، ورودی‌های کنترلی غیرخطی و ناشناخته بودن پارامترهای سیستم

علی ابویی<sup>۱</sup>، محمدرضا جاهدمطلق<sup>۲</sup>، محمدمهدی عارفی<sup>۳</sup>، زهرا رحمانی چراتی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، aliaboee@elec.iust.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران، jahedmr@iust.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، arefi@iust.ac.ir

<sup>۴</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، Rahmaniz@nit.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۱۲/۲۳)

**چکیده:** در این مقاله، ابتدا مدل دینامیکی سیستم فوق آشوب لورنز به طور مختصر معرفی می‌گردد. در ادامه کنترل‌کننده‌های مد لغزشی-تطبیقی چنان طراحی می‌شوند که سیستم فوق آشوب لورنز با وجود عوامل ناخواسته‌ای همچون عدم قطعیت، اغتشاش، ورودی‌های کنترلی غیرخطی پایدار گردد. فرض می‌شود کران‌های بالای عدم قطعیت، اغتشاش و پارامترهای سیستم لورنز نامعلوم باشند. برای طراحی کنترل‌کننده‌های لغزشی-تطبیقی از دو سطح لغزشی-تطبیقی و قوانین تطبیق برای پارامترهای نامعلوم استفاده شده است. پایداری دینامیک مد لغزشی سیستم فوق آشوب و شرط رسیدن به سطوح لغزشی-تطبیقی، با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف به اثبات می‌رسد. جهت برطرف کردن سوئیچینگ‌های فرکانس بالای سیگنال‌های کنترلی ناپیوسته، از جایگزینی یک تابع پیوسته (شبه به تابع علامت) با تابع علامت استفاده می‌شود تا با هموار شدن سیگنال‌های کنترلی از بروز پدیده وزوز در عمل جلوگیری شود. نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری با استفاده از نرم‌افزار MATLAB نشان می‌دهد کنترل‌کننده‌های طراحی شده قادر به پایداری سیستم لورنز در حضور عوامل ناخواسته ذکر شده، می‌باشند.

**کلمات کلیدی:** سیستم فوق آشوب، کنترل مد لغزشی، عدم قطعیت، پدیده وزوز، ورودی کنترلی غیرخطی، سطوح لغزشی-تطبیقی.

### Adaptive-Sliding Mode Control of Lorenz Hyperchaotic System Considering Uncertainties, External Disturbances, Nonlinear Inputs and Unknown Parameters

A. Abooe, M.R. Jahed-Motlagh, M.M. Arefi, Z. Rahmani

**Abstract:** In this paper, the dynamical model of the Lorenz hyperchaotic system is briefly introduced. An adaptive-sliding mode control scheme is proposed to stabilize the Lorenz hyperchaotic system in the presence of uncertainties, external disturbances, nonlinearity in the control inputs while parameters of the Lorenz system and the bounds of uncertainties and external disturbances are unknown. The mentioned control scheme is composed of two adaptive-sliding surfaces and adaptation laws for unknown parameters. The Lyapunov stability theorem is used to prove the stability of sliding mode dynamics and guarantee the reaching condition. High frequency switching of control inputs is removed by substituting the sign function with a continuous sign-like function. Numerical simulations based on MATLAB software are used to verify the feasibility and effectiveness of the proposed controllers.

**Keywords:** Hyperchaotic system, Sliding mode control, Uncertainty, Chattering phenomenon, Nonlinear control inputs, Adaptive-sliding surfaces.

## ۱ - مقدمه

با توجه به کاربردهای گسترده و فراوان پدیده آشوب در علوم مختلف از جمله مخابرات امن [۱]، مدارهای غیرخطی [۲]، واکنش‌های شیمیایی [۳]، الکترونیک قدرت [۴]، لیزر [۵]، مطالعه و تحقیق در مورد ویژگی‌های ذاتی این پدیده و کنترل آن اهمیت خاصی پیدا کرده است. شاید بتوان یکی از دلایل توجه خاص دانشمندان به پدیده غیرخطی آشوب را ویژگی‌های ذاتی و منحصر به فرد این پدیده از جمله حساسیت بسیار شدید به تغییرات خیلی کوچک در شرایط اولیه، طیف فرکانسی پهن و گسترده و جاذب عجیب<sup>۱</sup> دانست [۶]. مطالعات و تحقیقات ارائه شده در مورد آشوب را می‌توان در یک تقسیم‌بندی کلی به دو دسته تقسیم کرد. دسته اول مقالاتی هستند که توجه خود را به بررسی ماهیت پدیده آشوب، ویژگی‌های ذاتی آن، معرفی سیستم‌های آشوبناک جدید، کاربردهای عملی و فیزیکی آشوب معطوف ساخته‌اند [۶-۱۱]. دسته دوم مقالاتی هستند که تمرکز خود را بر روی موضوع کنترل آشوب و توسعه روش‌های کنترلی قابل اعمال به سیستم‌های آشوبناک، قرار داده‌اند [۱۲-۲۰]. با دقت در این دسته مقالات می‌توان دریافت که دو هدف عمده برای کنترل آشوب قابل تصور است. هدف اول از کنترل آشوب، خارج کردن سیستم آشوبناک از حالت آشوبی و همگرا ساختن این سیستم به سمت نقطه تعادل یا یک مدار پایدار متناوب<sup>۲</sup> (سیکل حدی) می‌باشد و هدف دوم، آشوبی‌سازی سیستم آشوبناک و طراحی کنترل‌کننده به گونه‌ای است که سیستم وارد ناحیه آشوبی خود شده و در این حالت باقی بماند [۲۱].

مقالات مرتبط با دسته اول، از دیدگاه پیچیدگی، سیستم‌های آشوبناک را به سه دسته آشوب معمولی (بعد پایین)، فوق آشوب<sup>۳</sup> (آشوب بعد بالا) و آشوب فضا-زمانی<sup>۴</sup> تقسیم می‌کنند. ساده‌ترین تعریفی که در اغلب مراجع [۶]، [۸]، [۱۰]، [۱۱]، برای یک سیستم فوق آشوب ارائه شده است بدین صورت است که "یک سیستم غیر-خطی که دارای حداقل دو نمای لیاپانوف مثبت باشد را فوق آشوب می‌نامند." در واقع وجود حداقل دو نمای لیاپانوف مثبت، مهم‌ترین و اصلی‌ترین شاخص تمایزدهنده میان پدیده آشوب بعد پایین و پدیده فوق آشوب در یک سیستم غیرخطی می‌باشد. اولین و ساده‌ترین سیستم فوق آشوب<sup>۵</sup> را راسلر<sup>۶</sup> در سال ۱۹۷۹ ارائه داد که توصیفی از یک

واکنش شیمیایی بود [۲۲]. در ادامه سیستم‌های فوق آشوب دیگری توسط دانشمندان و محققان علوم مختلف معرفی شدند [۱۱-۶]، [۲۶-۲۲]. تاکنون روش مشخص و سیستماتیکی برای ایجاد یک سیستم فوق آشوب ارائه نشده است اما با توجه به مقالاتی که سیستم‌های فوق آشوب جدید را معرفی کرده‌اند می‌توان به دو روش کلی زیر برای طراحی یک سیستم فوق آشوب رسید.

۱- اضافه کردن یک متغیر حالت جدید به سیستم‌های آشوب معمولی و افزایش بعد سیستم از نظر تعداد متغیرهای حالت. به عنوان نمونه برای این حالت می‌توان به مقالات [۱۱-۶] اشاره کرد.

۲- ایجاد تحریک سینوسی در یکی از پارامترهای ثابت سیستم آشوب معمولی. در این حالت بعد سیستم از نظر تعداد متغیرهای حالت افزایش نمی‌یابد اما سیستم از حالت خودمختار<sup>۷</sup> به غیرخودمختار تبدیل می‌شود و با این کار، پتانسیل به وجود آمدن پدیده فوق آشوب در یک سیستم آشوب معمولی با سه متغیر حالت فراهم می‌شود به عنوان نمونه برای این حالت می‌توان به مقالات [۲۶-۲۴] اشاره کرد.

حساسیت شدیدتر به تغییرات اندک در شرایط اولیه، پیچیدگی بیشتر و افزایش عدم قابلیت پیش‌بینی طولانی مدت سیستم‌های فوق آشوب نسبت به سیستم‌های آشوب بعد پایین باعث شده است که در برخی از کاربردها این سیستم‌ها جایگزین سیستم‌های آشوب بعد پایین شوند [۸] و مسئله کنترل پدیده فوق آشوب اهمیت خاصی پیدا کند. به عنوان یک نمونه شاخص می‌توان از جایگزینی سیگنال‌های آشوب معمولی با سیگنال‌های فوق آشوب در مخابرات امن رمزنگاری نام برد [۱]. متناظر با افزایش کاربردهای پدیده فوق آشوب در مواردی همچون اسیلاتورهای کلپیتس<sup>۸</sup> [۲] و مدارهای غیرخطی [۳]، روش‌های زیادی برای کنترل این پدیده توسعه داده شدند. به عنوان نمونه می‌توان به روش گام به عقب<sup>۹</sup> [۱۴]، فیدبک خطی و فیدبک سرعت<sup>۱۰</sup> [۱۵]، کنترل  $H_{\infty}$  [۱۶]، کنترل تطبیقی [۱۷] و کنترل مد لغزشی [۲۰-۱۸]، [۳۱-۲۷] اشاره کرد. اغلب مقالاتی که در مورد کنترل و حذف پدیده فوق آشوب ارائه شده است [۱۸-۱۴]، [۲۰]، به دو مسئله مهم توجه نکرده‌اند. مسئله اول عدم قطعیت، اغتشاش و نامعلوم بودن پارامترهای سیستم است که در کاربردهای عملی و فیزیکی (جهان واقعی) به طور ناخواسته با آن روبرو هستیم. بنابراین لازم است که در حین فرآیند طراحی کنترل‌کننده‌ها به این مسئله توجه شده و کنترل‌کننده‌ها با در نظر

<sup>7</sup>Autonomous<sup>8</sup>Colpitts Oscillators<sup>9</sup>Backstepping Method<sup>10</sup>Linear and Speed Feedback Control<sup>1</sup> Strange Attractor<sup>2</sup> Stable Periodic Orbit<sup>3</sup> Hyperchaos<sup>4</sup> Spatiotemporal<sup>5</sup> Hyperchaotic System<sup>6</sup> Rössler

فرض کرده است که سیستم راسلر تحت اغتشاش کراندار با کران معلوم و غیرخطی بودن ورودی‌هاست و تمام پارامترهای سیستم فوق آشوب راسلر معلوم بوده و هیچ‌گونه عدم قطعیتی در معادلات دینامیکی سیستم وجود ندارد. مقاله [۳۰]، با استفاده از روش کنترل مد لغزشی، مسئله سنکرون‌سازی دوسیستم فوق آشوب غیریکسان راسلر و چن را با وجود ورودی‌های کنترلی غیرخطی مورد بررسی قرار داده است، اما باید توجه داشت که مسایلی همچون عدم قطعیت، اغتشاش و پارامترهای نامعلوم را لحاظ نکرده است. ما در این مقاله، مسئله کنترل سیستم فوق آشوب لورنز را با وجود ورودی‌های کنترلی غیرخطی، اغتشاش کراندار، عدم قطعیت کراندار و نامعلوم بودن پارامترهای سیستم مورد توجه قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم کران‌های عدم قطعیت و اغتشاش نامعلوم هستند. برای طراحی کنترل‌کننده جهت پایدارسازی سیستم فوق آشوب لورنز از روش کنترل مد لغزشی - تطبیقی استفاده می‌شود. روش کنترل لغزشی - تطبیقی ارائه شده در این مقاله، از ترکیب سطوح لغزشی - تطبیقی همراه با قوانین تطبیق تشکیل شده است که قوانین تطبیق برای تخمین پارامترهای نامعلوم طراحی می‌شوند. همچنین با تغییر اندکی در سیگنال‌های کنترلی لغزشی - تطبیقی، سوئیچینگ‌های فرکانس بالای سیگنال‌های کنترلی تا حد زیادی کاهش می‌یابند. ساختار کلی این مقاله بدین صورت است که معادلات سیستم فوق آشوب لورنز، توصیف عدم قطعیت، اغتشاش و ورودی‌های کنترلی غیرخطی در بخش‌های دوم و سوم آورده شده‌اند. بخش چهارم به طراحی کنترل‌کننده‌های لغزشی - تطبیقی و اثبات پایداری سیستم فوق آشوب حلقه بسته اختصاص یافته است. نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری و نتیجه‌گیری کلی از مقاله به ترتیب در بخش‌های پنجم و ششم ارائه گردیده است.

## ۲- معرفی معادلات دینامیکی سیستم فوق آشوب لورنز

در سال ۲۰۰۷، جیا<sup>۲</sup>، سیستم فوق آشوبی را با ۴ متغیر حالت بر اساس سیستم آشوبناک لورنز ارائه داد [۶]. این سیستم با اضافه کردن معادله دینامیک چهارم به سیستم آشوبناک لورنز ساخته شده است که رابطه (۱)، معادلات توصیف‌کننده این سیستم را نشان می‌دهد.

گرفتن موارد ذکر شده طراحی شوند. مسئله دوم بدین گونه می‌باشد که اغلب فرض شده است ورودی‌های کنترلی به صورت خطی قابل اعمال به سیستم هستند [۱۸-۱۴]، [۲۰]. اما در تحقق عملی و جهان واقعی با غیرخطی بودن ورودی‌های کنترلی روبرو هستیم که ناشی از محدودیت‌های عملگرها می‌باشد. این غیرخطی شدن به این مفهوم است که ممکن است نتوانیم سیگنال‌های کنترلی را به صورت خطی و مستقیم به سیستم اعمال کنیم و در واقع توابع غیرخطی از سیگنال‌های کنترل طراحی شده به سیستم اعمال شوند. به عنوان نمونه‌ای از غیرخطی شدن ورودی‌های کنترلی، می‌توان به وجود محدودیت‌هایی همچون اشباع، ناحیه مرده<sup>۱</sup> و backlash اشاره کرد. از آنجایی که سیستم‌های فوق آشوب دارای حساسیت زیادی به هر نوع تغییرات در پارامترهای سیستم هستند، وجود عوامل غیرخطی‌ساز در مسیر ورودی-های کنترلی باعث می‌شود که کارایی کنترل‌کننده‌های طراحی شده برای این سیستم‌ها، تا حد زیادی کاهش پیدا کند و حتی در مواردی این کنترل‌کننده‌ها کارایی خود را به طور کامل از دست بدهند و این مسئله منجر به ناپایداری سیستم فوق آشوب حلقه بسته همراه با کنترل‌کننده شود. باید توجه داشت که تعداد محدودی از مقالات مرتبط با کنترل آشوب نیز مسئله ورودی‌های کنترلی غیرخطی، عدم قطعیت و اغتشاش را مورد بررسی و توجه قرار داده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان به [۱۹]، [۳۰-۲۷] اشاره کرد. مقاله [۱۹]، کنترل‌کننده مد لغزشی را برای سیستم آشوبناک یکپارچه با وجود ورودی‌های کنترلی غیرخطی و عدم قطعیت مورد بررسی قرار داده است. اما [۱۹]، به اغتشاش‌های خارجی توجه نداشته و همچنین فرض کرده است که تمام پارامترهای سیستم و کران عدم قطعیت معلوم و ثابت هستند. مقاله [۲۷]، برای سنکرون‌سازی دو سیستم فوق آشوب با وجود ورودی‌های کنترلی غیرخطی از روش کنترل مد لغزشی استفاده کرده است. در [۲۷]، عدم قطعیت و اغتشاش خارجی برای دو سیستم فوق آشوب مورد مطالعه، منظور نشده و تمام پارامترهای سیستم‌های آشوبناک معلوم و مشخص هستند. مقاله [۲۸]، روش کنترل مد لغزشی را برای کنترل دسته‌ی خاصی از سیستم‌های آشوب مورد استفاده قرار داده که سیستم مورد مطالعه، تحت عدم قطعیت و غیرخطی بودن ورودی‌های کنترلی است. همانند مقالات [۱۹]، [۲۷]، مقاله [۲۸] نیز پارامترهای سیستم آشوبناک و کران بالای عدم قطعیت را معلوم و ثابت فرض کرده است. مقاله [۲۹]، روش کنترل مد لغزشی را برای پایدارسازی سیستم فوق آشوب راسلر به کار برده و

<sup>2</sup> Jia<sup>1</sup> Dead-Zone

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -10(x_1 - x_2) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \beta x_1 - x_2 + \Delta f_1 + d_1(t) + \phi_1(u_1) \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \frac{8}{3} x_3 \\ \dot{x}_4 &= -x_1 x_3 + \eta x_4 + \Delta f_2 + d_2(t) + \phi_2(u_2) \end{aligned} \quad (2)$$

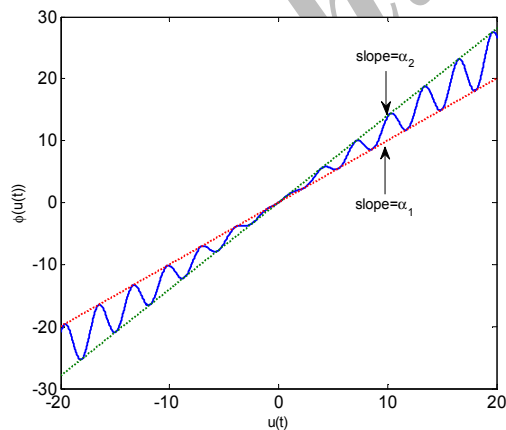
در رابطه (۲)،  $d_i(t)$ ،  $\Delta f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ،  $i=1,2$ ، به ترتیب بیانگر عدم قطعیت، اغتشاش و ورودی‌های کنترلی غیرخطی می‌باشند. همچنین فرض می‌کنیم که دو پارامتر سیستم یعنی  $\beta, \eta$  نامعلوم‌اند. عدم قطعیت و اغتشاش در محدودیت‌های رابطه (۳) و توابع غیرخطی از ورودی‌های کنترلی در محدودیت‌های رابطه (۴) صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} |\Delta f_i(x_1, \dots, x_4)| &\leq \delta_i, \quad i=1,2 \\ |d_i(t)| &\leq \zeta_i, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، ثابت‌های حقیقی مثبت  $\delta_1, \delta_2, \zeta_1, \zeta_2$ ، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی کران‌های بالای عدم قطعیت و اغتشاش هستند که فرض می‌شود این پارامترها نامعلوم باشند.  $\phi_i(u_i(t))$  توابع غیرخطی از ورودی‌های کنترلی هستند که شرایط رابطه (۴) را برآورده می‌کنند [۲۹]، [۳۰]، [۳۱].

$$\begin{aligned} \phi_i(0) &= 0, \quad i=1,2 \\ \alpha_1 u_1^2(t) &\leq \phi_1(u_1(t)) \cdot u_1(t) \leq \alpha_2 u_1^2(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \\ \gamma_1 u_2^2(t) &\leq \phi_2(u_2(t)) \cdot u_2(t) \leq \gamma_2 u_2^2(t), \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

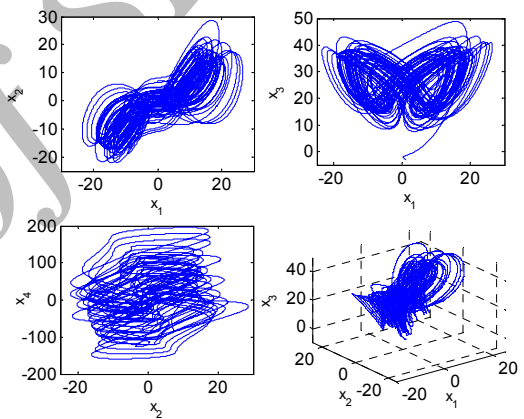
شکل (۲)، نمایش تصویری از شرط دوم رابطه (۴) را ارائه می‌دهد.



شکل ۲: شماتیک فرضی از شرط دوم رابطه (۴) [۲۹]، [۳۰]، [۳۱].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \beta x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \frac{8}{3} x_3 \\ \dot{x}_4 &= -x_1 x_3 + \eta x_4 \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، بیانگر متغیرهای حالت و  $x_i, i=1,2,3,4$ ، پارامترهای ثابت سیستم می‌باشند. چنانچه پارامترهای ثابت به صورت  $\beta=28, \eta=1.3$ ، انتخاب شوند، سیستم (۱) رفتاری فوق آشوبی با دو نمای لیاپانوف مثبت  $L_1=0.398, L_2=0.248$  از خود نشان می‌دهد. در این مقاله، سیستم (۱)، به عنوان محک ارزیابی برای پیاده‌سازی روش ارائه شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل (۱)، تعدادی از تصاویر جاذب فوق آشوبی این سیستم را در صفحه‌های دو بعدی  $x_1-x_2$ ،  $x_1-x_3$ ،  $x_2-x_4$  و فضای سه بعدی  $x_1-x_2-x_3$  نشان می‌دهد.



شکل ۱: تصاویر جاذب فوق آشوبی سیستم رابطه (۱) در فضاهای دو بعدی و سه بعدی در ادامه، فرض می‌کنیم که سیستم فوق آشوب رابطه (۱)، تحت چهار عامل ناخواسته ۱- عدم قطعیت کراندار با کران نامعلوم ۲- اغتشاش کراندار با کران نامعلوم ۳- ورودی‌های کنترلی غیرخطی و ۴- نامعلوم بودن دو پارامتر ثابت  $\beta, \eta$ ، قرار دارد. کنترل‌کننده‌های لغزشی- تطبیقی را به گونه‌ای طراحی می‌کنیم که سیستم فوق آشوب لورنز با وجود این عوامل ناخواسته، پایدار شده و به سمت نقطه تعادل خود همگرا شود.

### ۳- توصیف سیستم فوق آشوب لورنز همراه با ورودی‌های کنترلی غیرخطی، اغتشاش، عدم قطعیت و پارامترهای نامعلوم

رابطه (۲)، سیستم فوق آشوب لورنز را همراه با در نظر گرفتن ورودی‌های کنترلی غیرخطی، اغتشاش، عدم قطعیت و پارامترهای نامعلوم  $\beta, \eta$  نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{s}_1(t) = 0 \\ \dot{s}_2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) + \dot{n}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_4(t) + \dot{n}_2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -10x_1 - x_1x_3 - \mu_1x_2 \\ \dot{x}_4(t) = -x_1 - \mu_2x_4 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۱)، دینامیک مد لغزشی سیستم فوق آشوب لورنز به صورت رابطه (۸)، نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= -10x_1 - x_1x_3 - \mu_1x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - \mu_2x_4 \end{aligned} \quad (8)$$

برای اثبات پایداری دینامیک مد لغزشی رابطه (۸)، قضیه (۱) و اثبات آن در زیر ارائه می‌گردد.

**قضیه (۱):** دینامیک مد لغزشی سیستم فوق آشوب رابطه (۸)، با توجه به سطوح لغزشی - تطبیقی تعریف شده در رابطه‌های (۵) و (۶)، پایدار می‌باشد. این بدان معنی است که چنانچه متغیرهای حالت سیستم بر روی سطوح لغزشی - تطبیقی قرار گیرند، سیستم فوق آشوب پایدار خواهد بود.

**اثبات قضیه (۱):** تابع لیاپانوف را به صورت  $V(t) = \sum_{i=1}^4 x_i^2(t)$  در نظر می‌گیریم که یک تابع مثبت معین می‌باشد. با توجه به قضیه پایداری لیاپانوف، برای اثبات پایداری دینامیک مد لغزشی رابطه (۸)، باید نشان دهیم که مشتق زمانی تابع لیاپانوف، مقداری منفی است که رابطه (۹) این موضوع را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^4 x_i \dot{x}_i = x_1[10(x_2 - x_1) + x_4] + \\ &+ x_2[-10x_1 - x_1x_3 - \mu_1x_2] + \\ &+ x_3[x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3] + x_4[-x_1 - \mu_2x_4] \\ \Rightarrow \dot{V} &= -10x_1^2 - \mu_1x_2^2 - \frac{8}{3}x_3^2 - \mu_2x_4^2 \end{aligned} \quad (9)$$

از آنجایی که دو پارامتر  $\mu_1, \mu_2$  در اختیار طراح بوده و بزرگتر از صفر انتخاب می‌شوند، همواره  $\dot{V}(t)$ ، مقدار منفی است. در ادامه پارامتر  $\omega$  را به صورت  $\omega = \min(\frac{8}{3}, \mu_1, \mu_2)$  تعریف می‌کنیم. بنابراین با توجه به رابطه (۹) و تعریف پارامتر  $\omega$ ، نامساوی رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود.

#### ۴- طراحی کنترل کننده‌های مد لغزشی با

##### تعریف دو سطح لغزشی - تطبیقی

کنترل مد لغزشی یکی از روش‌های کنترل مقاوم برای سیستم‌های دارای عدم قطعیت می‌باشد که دارای ویژگی‌های ذاتی مانند تحقق ساده و آسان، پاسخ سریع، عدم حساسیت به تغییر در پارامترهای سیستم و اغتشاش‌های خارجی است [۱۸]. با توجه به این نکته، برای کنترل سیستم فوق آشوب رابطه (۲)، روش کنترل مد لغزشی با تعریف دو سطح لغزشی - تطبیقی، انتخاب شده است. طراحی کنترل کننده لغزشی از دو مرحله تشکیل شده است که در مرحله اول، سطوح لغزشی - تطبیقی تعریف می‌گردد و پایداری دینامیک مد لغزشی سیستم رابطه (۲) (پایداری سیستم، هنگامی که حالت‌های سیستم بر روی سطوح لغزشی - تطبیقی قرار گرفته‌اند) با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف به اثبات می‌رسد. در مرحله دوم، بردار سیگنال‌های کنترلی طراحی می‌گردد که از دو سیگنال کنترل متناسب با هر کدام از سطوح لغزشی - تطبیقی تشکیل شده است. شرط رسیدن به سطوح لغزشی - تطبیقی به صورت تحلیلی و با استفاده از قضیه (۲) اثبات می‌شود.

#### ۴-۱- تعریف سطوح لغزشی - تطبیقی و اثبات

##### پایداری دینامیک مد لغزشی سیستم فوق آشوب لورنز

بردار سطوح لغزشی - تطبیقی را به صورت  $S(t) = [s_1(t) \ s_2(t)]^T$ ، در نظر می‌گیریم که دو سطح لغزشی - تطبیقی  $s_1(t), s_2(t)$  به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= x_2(t) + n_1(t) \\ s_2(t) &= x_4(t) + n_2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $n_1(t), n_2(t)$  دو تابع پیوسته از متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب لورنز می‌باشند که رابطه (۶) نحوه‌ی ارتباط این دو تابع را با متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \dot{n}_1(t) &= 10x_1 + x_1x_3 + \mu_1x_2 \\ \dot{n}_2(t) &= x_1 + \mu_2x_4 \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه (۶)،  $\mu_1, \mu_2$  دو ثابت حقیقی مثبت هستند که در اختیار طراح قرار دارند. چنانچه متغیرهای حالت سیستم بر روی سطوح لغزشی - تطبیقی قرار گیرند، دو شرط  $S(t) = 0, \dot{S}(t) = 0$  برقرار خواهد شد که از برقراری این دو شرط، رابطه (۷) نتیجه می‌شود.

$\hat{\eta}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2$  با استفاده از قانون‌های تطبیق برای پارامترهای نامعلوم  $\beta, \eta, \delta_1, \delta_2, \zeta_1, \zeta_2$  تعیین می‌شوند که این قانون‌های تطبیق در رابطه (۱۶) آورده شده است.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}} &= |s_1| |x_1|, & \hat{\beta}(0) &= \hat{\beta}_0 \\ \dot{\hat{\delta}}_1 &= |s_1|, & \hat{\delta}_1(0) &= \hat{\delta}_{10} \\ \dot{\hat{\zeta}}_1 &= |s_1|, & \hat{\zeta}_1(0) &= \hat{\zeta}_{10} \\ \dot{\hat{\delta}}_2 &= |s_2|, & \hat{\delta}_2(0) &= \hat{\delta}_{20} \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 &= |s_2|, & \hat{\zeta}_2(0) &= \hat{\zeta}_{20} \\ \dot{\hat{\eta}} &= |x_4| |s_2|, & \hat{\eta}(0) &= \hat{\eta}_0 \end{aligned} \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)،  $\hat{\beta}_0, \hat{\delta}_{10}, \hat{\delta}_{20}, \hat{\zeta}_{10}, \hat{\zeta}_{20}, \hat{\eta}_0$  به ترتیب مقادیر اولیه مثبت، برای  $\hat{\beta}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \hat{\eta}$  می‌باشند.

در ادامه نشان می‌دهیم که سیگنال‌های کنترلی ارائه شده در رابطه-های (۱۴) تا (۱۶)، توانایی رساندن متغیرهای حالت سیستم به سطوح لغزشی- تطبیقی  $s_1(t), s_2(t)$  را دارند و با وجود این دو سیگنال کنترلی، شرط رسیدن<sup>۲</sup> برآورده می‌شود. برای این منظور قضیه (۲) و اثبات آن در زیر آورده شده است.

**قضیه (۲):** سیستم فوق آشوب لورنز رابطه (۲) را با اغتشاش، عدم قطعیت، ورودی‌های کنترلی غیرخطی و پارامترهای نامعلوم  $\beta, \eta$  در نظر بگیرید. با تعریف سطوح لغزشی- تطبیقی به صورت رابطه (۵) و سیگنال‌های کنترلی به صورت رابطه‌های (۱۴) تا (۱۶)، سیستم فوق آشوب لورنز<sup>۲</sup> به سطوح لغزشی- تطبیقی همگرا خواهد شد.  
**اثبات قضیه (۲):** برای اثبات از قضیه پایداری لیاپانوف استفاده می‌کنیم. بدین منظور متغیرهای  $\theta_1$  تا  $\theta_6$  را به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \hat{\beta} - |\beta| \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\hat{\beta}} \\ \theta_2 &= \hat{\delta}_1 - \delta_1 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{\hat{\delta}}_1 \\ \theta_3 &= \hat{\zeta}_1 - \zeta_1 \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \dot{\hat{\zeta}}_1 \\ \theta_4 &= \hat{\delta}_2 - \delta_2 \Rightarrow \dot{\theta}_4 = \dot{\hat{\delta}}_2 \\ \theta_5 &= \hat{\zeta}_2 - \zeta_2 \Rightarrow \dot{\theta}_5 = \dot{\hat{\zeta}}_2 \\ \theta_6 &= \hat{\eta} - |\eta| \Rightarrow \dot{\theta}_6 = \dot{\hat{\eta}} \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $\beta, \delta_1, \delta_2, \zeta_1, \zeta_2, \eta$  پارامترهای ثابت و نامعلوم می‌باشند. تابع لیاپانوف را به صورت رابطه (۱۸)، در نظر می‌گیریم که یک تابع مثبت معین است.

$$\dot{V} = -10x_1^2 - \mu_1 x_2^2 - \frac{8}{3} x_3^2 - \mu_2 x_4^2 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \dot{V} \leq -\omega \|x\|_2^2$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۰)، رابطه (۱۱) بدست می‌آید.

$$V(t) \leq V(0) - \omega \int_0^t \|x\|_2^2 d\tau \Rightarrow \quad (11)$$

$$\Rightarrow V(0) \geq V(t) + \omega \int_0^t \|x\|_2^2 d\tau \geq \omega \int_0^t \|x\|_2^2 d\tau$$

در ادامه با میل دادن متغیر  $t$  به سمت بی‌نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) نامساوی رابطه (۱۱) به نامساوی رابطه (۱۲) تبدیل می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \omega \int_0^t \|x\|_2^2 d\tau \right\} \leq V(0) < \infty \quad (12)$$

بنابراین با توجه به لم باربالت<sup>۱</sup>، می‌توان رابطه (۱۳) را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \omega \|x(t)\|_2^2 \right\} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \omega \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به رابطه (۱۳)، زمانی که  $t$  به سمت بی‌نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) میل می‌کند، متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب به سمت صفر میل خواهند کرد ( $x_i(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, 3, 4$ ). □

#### ۲-۴- طراحی بردار سیگنال‌های کنترلی لغزشی-

##### تطبیقی و اثبات شرط رسیدن

بردار سیگنال‌های کنترلی لغزشی- تطبیقی به صورت  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$  در نظر گرفته شده است که رابطه (۱۴)، دو سیگنال کنترلی  $u_1(t), u_2(t)$  را نشان می‌دهد.

$$u_1(t) = -\lambda_1 \Omega_1 \text{sign}(s_1), \quad \lambda_1 > \frac{1}{\alpha_1} \quad (14)$$

$$u_2(t) = -\lambda_2 \Omega_2 \text{sign}(s_2), \quad \lambda_2 > \frac{1}{\gamma_1}$$

در رابطه (۱۴)،  $\lambda_1, \lambda_2$  دو ثابت حقیقی مثبت در اختیار طراح می‌باشند و به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که دو شرط  $\lambda_1 > \frac{1}{\alpha_1}$  و  $\lambda_2 > \frac{1}{\gamma_1}$  برآورده شود.  $\alpha_1, \gamma_1$  دو ثابت حقیقی و مثبت ارایه شده در رابطه (۴) بوده و  $\Omega_1, \Omega_2$  توابع مثبت از متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب هستند که در رابطه (۱۵) نشان داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (\hat{\beta} + 10) |x_1| + |\mu_1 - 1| |x_2| + \hat{\delta}_1 + \hat{\zeta}_1 \\ \Omega_2 &= |x_1| + |x_1 x_3| + (\mu_2 + \hat{\eta}) |x_4| + \hat{\delta}_2 + \hat{\zeta}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

<sup>2</sup>Reaching Condition

<sup>1</sup>Barbalat's Lemma

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 s_1^2 \text{sign}^2(s_1) &\leq -s_1^2 \text{sign}(s_1) \phi_1(u_1) \\ s_1 \text{sign}(s_1) &= |s_1| \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 |s_1|^2 \leq -s_1 |s_1| \phi_1(u_1) \quad (22)$$

$$\Rightarrow s_1 \phi_1(u_1) \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 |s_1|$$

رابطه (۲۲) نشان می‌دهد که نامساوی  $s_1 \phi_1(u_1) \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 |s_1|$  برقرار است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که نامساوی  $s_2 \phi_2(u_2) \leq -\gamma_1 \lambda_2 \Omega_2 |s_2|$  نیز همواره برقرار می‌باشد. با استفاده از دو نامساوی  $s_1 \phi_1(u_1) \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 |s_1|$  و  $s_2 \phi_2(u_2) \leq -\gamma_1 \lambda_2 \Omega_2 |s_2|$  همچنین رابطه (۲۰)، رابطه (۲۳) نتیجه می‌شود.

$$\dot{V} \leq |s_1| \Omega_1 (1 - \alpha_1 \lambda_1) + |s_2| \Omega_2 (1 - \gamma_1 \lambda_2) \quad (23)$$

با توجه به دو شرط  $\lambda_1 > 1/\alpha_1$  و  $\lambda_2 > 1/\gamma_1$ ، نامساوی رابطه (۲۴) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} \leq -\{|s_1| \Omega_1 (\alpha_1 \lambda_1 - 1) + |s_2| \Omega_2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)\} \quad (24)$$

با تعریف تابع  $g(t)$  به صورت  $g(t) = |s_1| \Omega_1 (\alpha_1 \lambda_1 - 1) + |s_2| \Omega_2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)$  و انتگرال‌گیری از نامساوی رابطه (۲۴)، به رابطه (۲۵) خواهیم رسید.

$$V(t) \leq V(0) - \int_0^t |g(\tau)| d\tau \Rightarrow \quad (25)$$

$$\Rightarrow V(0) \geq V(t) + \int_0^t |g(\tau)| d\tau \geq \int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

برای طرفین نامساوی رابطه (۲۵)،  $t$  را به سمت بی نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) میل داده، نامساوی رابطه (۲۶) نتیجه می‌گردد.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq V(0) < \infty \quad (26)$$

با توجه به لم باربالت، رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \{|s_1| \Omega_1 (\alpha_1 \lambda_1 - 1) + |s_2| \Omega_2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)\} \rightarrow 0 \quad (27)$$

از آنجایی که برای تمامی زمان‌های  $t > 0$  همواره  $\Omega_1 > 0$ ،  $\Omega_2 > 0$ ،  $(\alpha_1 \lambda_1 - 1) > 0$  و  $(\gamma_1 \lambda_2 - 1) > 0$  هستند، با توجه به رابطه (۲۷) می‌توان نتیجه گرفت برای زمانی که  $t$  به سمت بی نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) میل می‌کند،  $(s_1(t), s_2(t))$  به سمت صفر میل خواهند کرد ( $(s_1(t), s_2(t)) \rightarrow 0$ ). □

به علت وجود تابع علامت و در نتیجه ناپوستگی سیگنال‌های کنترلی رابطه (۱۴)، زمانی که متغیرهای حالت سیستم به سطوح لغزشی - تطبیقی برسند، سیگنال کنترلی اول  $u_1(t)$  بین مقادیر  $(\hat{\delta}_1 + \hat{\zeta}_1)$  و  $(-\hat{\delta}_1 + \hat{\zeta}_1)$  و سیگنال کنترلی دوم  $u_2(t)$  بین مقادیر

$$V(t) = \frac{1}{2} (S^T S + \sum_{i=1}^6 \theta_i^2) \quad (18)$$

برای اثبات شرط رسیدن به سطوح لغزشی - تطبیقی، کافی است نشان دهیم که مشتق تابع لیاپانوف مقداری منفی است که رابطه‌های (۱۹) تا (۲۷) این موضوع را به اثبات می‌رسانند.

$$(19)$$

$$\dot{V}(t) = s_1 \dot{s}_1 + s_2 \dot{s}_2 + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i \Rightarrow$$

$$\dot{V}(t) = s_1 (\dot{x}_2 + \dot{n}_1) + s_2 (\dot{x}_4 + \dot{n}_2) + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s_1 [-x_1 x_3 + \beta x_1 - x_2 + \Delta f_1 + d_1(t) + \\ & \phi_1(u_1(t)) + 10x_1 + x_1 x_3 + \mu_1 x_2] + \\ & + s_2 [-x_1 x_3 + \eta x_4 + \Delta f_2 + d_2(t) + \\ & \phi_2(u_2(t)) + x_1 + \mu_2 x_4] + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & s_1 [(\beta + 10)x_1 + (\mu_1 - 1)x_2 + \\ & + \Delta f_1 + d_1(t) + \phi_1(u_1(t))] + \\ & + s_2 [x_1 - x_1 x_3 + (\eta + \mu_2)x_4 + \\ & + \Delta f_2 + d_2(t) + \phi_2(u_2(t))] + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \{|s_1| |\beta + 10| |x_1| + |s_1| |\mu_1 - 1| |x_2| + |s_1| \delta_1 + \\ & + |s_1| \zeta_1 + s_1 \phi_1(u_1(t)) + |s_2| |x_1| + |s_2| |x_1 x_3| + \\ & + |s_2| |\eta + \mu_2| |x_4| + |s_2| \delta_2 + |s_2| \zeta_2 + s_2 \phi_2(u_2(t)) \\ & + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i + \Omega_1 |s_1| - \Omega_1 |s_1| + \Omega_2 |s_2| - \Omega_2 |s_2|\} \\ \Rightarrow \dot{V}(t) \leq & \{|s_1| |x_1| (|\beta| - \hat{\beta}) + |s_1| (\delta_1 - \hat{\delta}_1) + |s_1| (\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) + \\ & + |s_2| |x_4| (|\eta| - \hat{\eta}) + |s_2| (\delta_2 - \hat{\delta}_2) + |s_2| (\zeta_2 - \hat{\zeta}_2) + \\ & + \sum_{i=1}^6 \theta_i \dot{\theta}_i + \Omega_1 |s_1| + s_1 \phi_1(u_1(t)) \\ & + \Omega_2 |s_2| + s_2 \phi_2(u_2(t))\} \end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۹)، رابطه (۲۰) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}(t) \leq \{\Omega_1 |s_1| + s_1 \phi_1(u_1(t)) + \Omega_2 |s_2| + s_2 \phi_2(u_2(t))\} \quad (20)$$

در ادامه با استفاده از رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) نشان می‌دهیم که دو نامساوی  $s_1 \phi_1 \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 |s_1|$  و  $s_2 \phi_2 \leq -\gamma_1 \lambda_2 \Omega_2 |s_2|$  برقرار است.

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1^2(t) \leq \phi_1(u_1) \cdot u_1(t) \leq \alpha_2 u_1^2(t) \\ u_1 = -\lambda_1 \Omega_1 \text{sign}(s_1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \lambda_1^2 \Omega_1^2 \text{sign}^2(s_1) \leq -\lambda_1 \Omega_1 \text{sign}(s_1) \cdot \phi_1(u_1) \quad (21)$$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \Omega_1 \text{sign}^2(s_1) \leq -\text{sign}(s_1) \cdot \phi_1(u_1)$   
 با ضرب طرفین رابطه (۲۱) در  $s_1^2(t)$  به رابطه (۲۲) خواهیم رسید.

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1^2(t) \leq \phi_1(u_1) u_1(t) \leq \alpha_2 u_1^2(t) \\ u_1(t) = -\lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \lambda_1^2 \Omega_1^4 \frac{s_1^2}{(\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1)^2} \leq -\lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1} \phi_1(u_1) \quad (30)$$

$$s_1 \phi_1(u_1) \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1^2}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)}$$

به طور مشابه با رابطه (۳۰) می توان نشان داد که نامساوی  
 $s_2 \phi_2(u_2) \leq -\gamma_1 \lambda_2 \Omega_2^2 \frac{s_2^2}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2}$  نیز برقرار است. با جایگذاری دو  
 نامساوی ذکر شده در رابطه (۲۹)، رابطه (۳۱) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left\{ \Omega_1 |s_1| + \Omega_2 |s_2| - \alpha_1 \lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1^2}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \lambda_1 \Omega_2^2 \frac{s_2^2}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} \right\} \\ \dot{V}(t) &\leq \left\{ \frac{\Omega_1^2 |s_1|^2 (1 - \alpha_1 \lambda_1)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} + \frac{\Omega_2^2 |s_2|^2 (1 - \gamma_1 \lambda_2)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_1 |s_1| \varepsilon_1(t)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} + \frac{\Omega_2 |s_2| \varepsilon_2(t)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن نامساوی  $0 \leq \frac{ab}{a+b} \leq a$ , for  $a, b \geq 0$  می توان دو نامساوی رابطه (۳۲) را نتیجه گرفت.

$$\begin{cases} \frac{\Omega_1 |s_1| \varepsilon_1(t)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} \leq \varepsilon_1(t) \\ \frac{\Omega_2 |s_2| \varepsilon_2(t)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} \leq \varepsilon_2(t) \end{cases} \quad (32)$$

در ادامه با توجه به رابطه های (۳۱) و (۳۲)، رابطه (۳۳) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left\{ -\frac{\Omega_1^2 |s_1|^2 (\alpha_1 \lambda_1 - 1)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Omega_2^2 |s_2|^2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

با انتخاب  $h(t) = \frac{\Omega_1^2 |s_1|^2 (\alpha_1 \lambda_1 - 1)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} + \frac{\Omega_2^2 |s_2|^2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)}$  و  
 انتگرال گیری از نامساوی رابطه (۳۳)، به رابطه (۳۴) خواهیم رسید.

$(\hat{\delta}_2 + \hat{\zeta}_2)$  و  $(\hat{\delta}_2 + \hat{\zeta}_2) - \lambda_2$  با فرکانس خیلی بالا سوئیچ خواهند کرد. این سوئیچینگ فرکانس بالا باعث به وجود آمدن پدیده وزوز<sup>۱</sup> می شود که در عمل باعث آسیب دیدن و کاهش عمر مفید عملگرها خواهد شد. برای غلبه بر این مشکل می توان تابع علامت را با تابعی پیوسته و مشابه با تابع علامت جایگزین کرد. رابطه (۲۸)، سیگنال های کنترلی رابطه (۱۴) را با این توابع پیوسته جدید نشان می دهد.

$$u_1(t) = -\lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)}, \quad \lambda_1 > \frac{1}{\alpha_1} \quad (28)$$

$$u_2(t) = -\lambda_2 \Omega_2^2 \frac{s_2}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)}, \quad \lambda_2 > \frac{1}{\gamma_1}$$

در رابطه (۲۸)،  $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$  دو تابع همواره مثبت با شرط  $\int_0^\infty \varepsilon_i(t) dt < \infty, i = 1, 2$  می باشند که انتخاب این دو تابع در اختیار طراح می باشد. قضیه (۳)، نشان می دهد که سیگنال های کنترلی لغزشی- تطبیقی ارائه شده در رابطه (۲۸)، توانایی رساندن متغیرهای حالت سیستم به سطوح لغزشی- تطبیقی  $s_1(t), s_2(t)$  را دارند.

**قضیه (۳):** سیستم فوق آشوب لورنز رابطه (۲) را با اغتشاش، عدم قطعیت، ورودی های کنترلی غیرخطی و پارامترهای نامعلوم  $\beta, \eta$  در نظر بگیرید. با تعریف سطوح لغزشی- تطبیقی به صورت رابطه (۵) و سیگنال کنترلی به صورت رابطه (۲۸)، متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب لورنز به سطوح لغزشی- تطبیقی همگرا خواهند شد.

**اثبات قضیه (۳):** اثبات این قضیه، مشابه با قضیه (۲) می باشد. بنابراین با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف مطرح شده در اثبات قضیه (۲)، نامساوی رابطه (۲۹) نتیجه می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left\{ \Omega_1 |s_1| + s_1 \phi_1(u_1(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \Omega_2 |s_2| + s_2 \phi_2(u_2(t)) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

در ادامه با استفاده از رابطه (۳۰) نشان می دهیم که دو نامساوی  $s_1 \phi_1 \leq -\alpha_1 \lambda_1 \Omega_1^2 \frac{s_1^2}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1}$  و  $s_2 \phi_2 \leq -\gamma_1 \lambda_2 \Omega_2^2 \frac{s_2^2}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2}$  برقرار است.

<sup>1</sup>Chattering Phenomenon



$$\begin{cases} \phi_1(u_1(t)) = [1.4 + 0.2 \sin(u_1(t))]u_1(t) \\ \phi_2(u_2(t)) = [1.3 + 0.2 \cos(u_2(t))]u_2(t) \end{cases} \quad (39)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1.6 \\ \gamma_1 = 1.1, \gamma_2 = 1.5 \end{cases}$$

پارامترهای  $\lambda_1, \lambda_2$  با توجه به شرطهای  $\lambda_1 > 1/\alpha_1$  و  $\lambda_2 > 1/\gamma_1$ ، به صورت  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  انتخاب شده‌اند. پارامترهای  $\mu_1, \mu_2$  و توابع  $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$  که در اختیار طراح قرار دارند به صورت  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 0.5$  و  $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = 0.1e^{-0.1t}$  و سیگنال‌های شده‌اند. در ادامه با در نظر گرفتن رابطه‌های (۱۴) و (۲۸)، سیگنال‌های کنترل به صورت رابطه‌های (۴۰) و (۴۱) نتیجه می‌شوند.

$$u_1(t) = -\{(\hat{\beta} + 10)|x_1| + 2|x_2| + \hat{\delta}_1 + \hat{\zeta}_1\} \text{sign}(s_1) \quad (40)$$

$$u_2(t) = -\{|x_1| + |x_3| + (0.5 + \hat{\eta})|x_4| + \hat{\delta}_2 + \hat{\zeta}_2\} \text{sign}(s_2)$$

$$u_1(t) = -\Omega_1^2 \frac{s_1}{\Omega_1 |s_1| + 0.1e^{-0.1t}}, \quad \Omega_1 = (\hat{\beta} + 10)|x_1| + 2|x_2| + \hat{\delta}_1 + \hat{\zeta}_1 \quad (41)$$

$$u_2(t) = -\Omega_2^2 \frac{s_2}{\Omega_2 |s_2| + 0.1e^{-0.1t}}, \quad \Omega_2 = |x_1| + |x_3| + (0.5 + \hat{\eta})|x_4| + \hat{\delta}_2 + \hat{\zeta}_2$$

در رابطه‌های (۴۰) و (۴۱)، متغیرهای  $\hat{\beta}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2$  و  $\hat{\eta}$  با توجه به قانون‌های تطبیق رابطه (۱۶) تعیین می‌شوند و مقادیر اولیه در نظر گرفته شده برای این پارامترها در رابطه (۴۲) آورده شده است.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= 3, \hat{\delta}_{1_0} = 1.5, \hat{\zeta}_{1_0} = 0.5 \\ \hat{\delta}_{2_0} &= 1.8, \hat{\zeta}_{2_0} = 2, \hat{\eta}_0 = 2 \end{aligned} \quad (42)$$

## ۵-۱- نتایج شبیه‌سازی با استفاده از سیگنال‌های

### کنترلی رابطه (۴۰)

شکل (۳)، پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب لورنز را با شرایط اولیه  $X(0) = [0.1, 2, 3, -3]^T$  و اعمال سیگنال‌های کنترلی رابطه (۴۰) نشان می‌دهد که متغیرهای حالت به سمت نقطه تعادل خود همگرا شده‌اند. شکل‌های (۴) تا (۶) به ترتیب نمودار سطوح لغزشی - تطبیقی، نمودار سیگنال‌های کنترل و پاسخ زمانی پارامترهای نامعلوم را نشان می‌دهند. همان طوری که انتظار می‌رفت، به علت استفاده از تابع علامت، سیگنال‌های کنترلی این قسمت از

$$V(t) \leq V(0) - \int_0^t h(\tau) d\tau + \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d\tau$$

$$\Rightarrow V(t) + \int_0^t h(\tau) d\tau \leq V(0) + \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d\tau \quad (34)$$

$$\Rightarrow \int_0^t h(\tau) d\tau \leq V(0) + \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d\tau$$

برای طرفین نامساوی رابطه (۳۴)،  $t$  را به سمت بی‌نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) میل داده و با در نظر گرفتن فرض  $\int_0^\infty \varepsilon_i(t) dt < \infty, i = 1, 2$ ، نامساوی رابطه (۳۵) نتیجه می‌گردد.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(\tau) d\tau < \infty \quad (35)$$

در ادامه با توجه به لم باربالت، به رابطه (۳۶) می‌رسیم.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Omega_1^2 |s_1|^2 (\alpha_1 \lambda_1 - 1)}{\Omega_1 |s_1| + \varepsilon_1(t)} + \frac{\Omega_2^2 |s_2|^2 (\gamma_1 \lambda_2 - 1)}{\Omega_2 |s_2| + \varepsilon_2(t)} \right\} \rightarrow 0 \quad (36)$$

از آنجایی که برای همه‌ی زمان‌های  $t > 0$  همواره  $\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0, (\alpha_1 \lambda_1 - 1) > 0$  و  $(\gamma_1 \lambda_2 - 1) > 0$  هستند، با توجه به رابطه (۳۶) می‌توان نتیجه گرفت برای زمانی که  $t$  به سمت بی‌نهایت ( $t \rightarrow \infty$ ) میل می‌کند،  $s_1(t), s_2(t)$  به سمت صفر میل خواهند کرد ( $(s_1(t), s_2(t)) \rightarrow 0$ ). □

## ۵- نتایج شبیه‌سازی

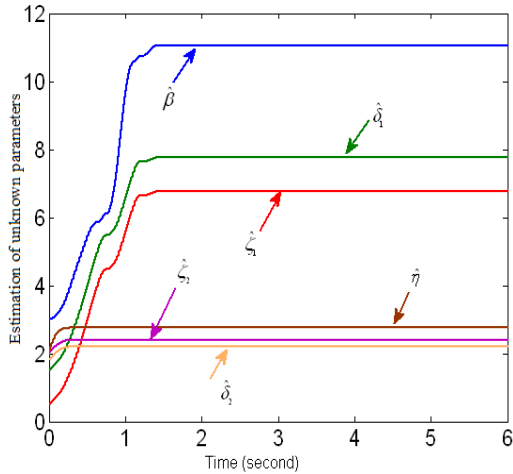
در این بخش، شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم افزار MATLAB انجام شده است. عدم قطعیت و اغتشاش‌ها به صورت رابطه‌های (۳۷) و (۳۸) انتخاب شده‌اند.

$$\begin{cases} \Delta f_1 = 0.3 \prod_{i=1}^4 \sin(i \pi x_i) \Rightarrow |\Delta f_1| \leq 0.3 = \delta_1 \\ \Delta f_2 = 0.2 \prod_{i=1}^4 \sin(i \pi x_i) \Rightarrow |\Delta f_2| \leq 0.2 = \delta_2 \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} d_1(t) = 0.15 \sin(5t) \Rightarrow |d_1(t)| \leq 0.15 = \zeta_1 \\ d_2(t) = 0.1 \sin(7t) \Rightarrow |d_2(t)| \leq 0.1 = \zeta_2 \end{cases} \quad (38)$$

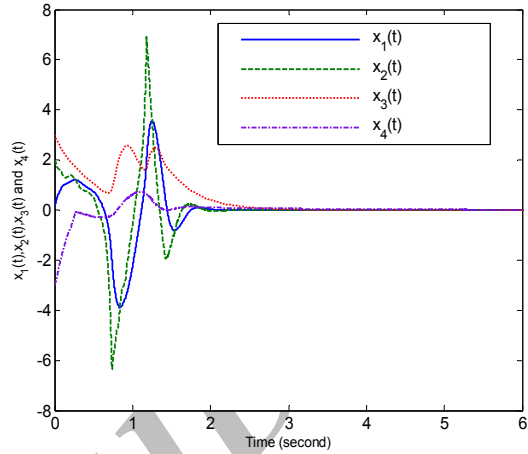
همچنین ورودی‌های کنترلی غیرخطی به صورت رابطه (۳۹)

منظور شده‌اند.



شکل ۶: پاسخ زمانی پارامترهای نامعلوم با در نظر گرفتن قوانین تطبیق

سوئیچینگ فرکانس بالایی برخوردارند که در پیاده سازی عملی مشکلاتی را به وجود می آورند.

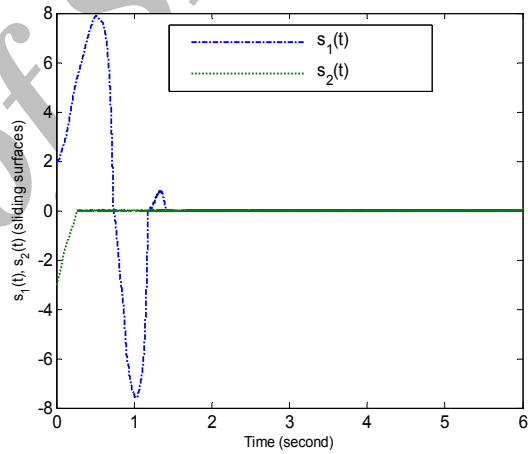


شکل ۷: پاسخ زمانی متغیرهای سیستم فوق آشوب با اعمال کنترل کننده رابطه (۴۰)

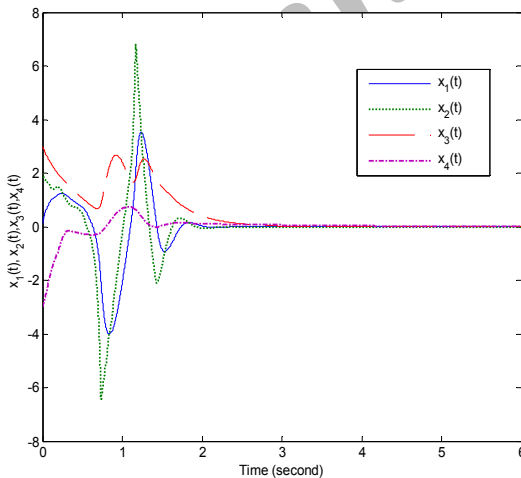
۵-۲- نتایج شبیه سازی با استفاده از سیگنال های

کنترل رابطه (۴۱)

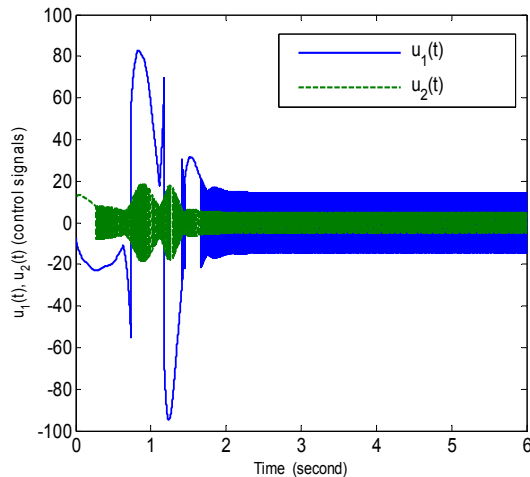
پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب لورنز با شرایط اولیه  $X(0) = [0.1, 2, 3, -3]^T$  و اعمال کنترل کننده های رابطه (۴۱) در شکل (۷)، آورده شده است. شکل های (۸) تا (۱۰) به ترتیب نمودار سطوح لغزشی- تطبیقی، نمودار سیگنال های کنترل و پاسخ زمانی پارامترهای نامعلوم مرتبط با این قسمت را نشان می دهند. در شکل (۹) به خوبی دیده می شود که سوئیچینگ های فرکانس بالای سیگنال های کنترل تا حد بسیار زیادی از بین رفته اند.



شکل ۸: نمودار دو سطح لغزشی  $s_1(t), s_2(t)$



شکل ۹: پاسخ زمانی متغیرهای سیستم فوق آشوب با اعمال کنترل کننده رابطه (۴۱)



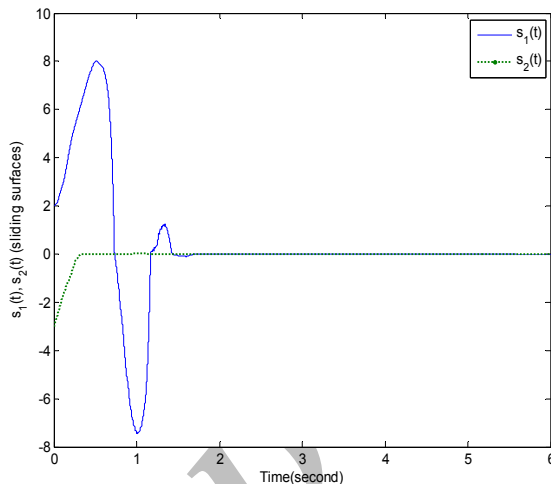
شکل ۱۰: نمودار سیگنال های کنترلی رابطه (۴۰)

## ۶- نتیجه گیری

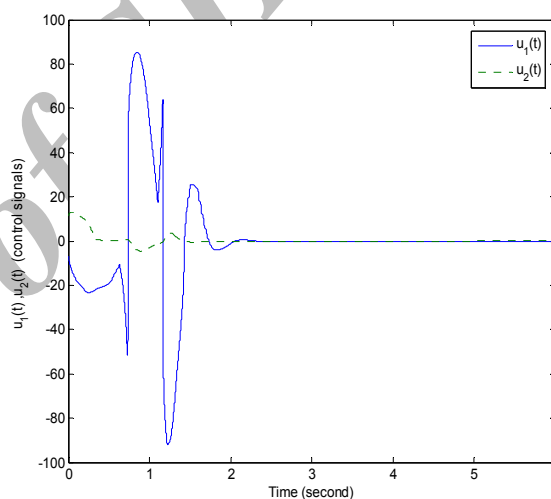
در این مقاله، پس از معرفی و بررسی مختصر رفتار دینامیکی سیستم فوق آشوب لورنز، برای پایداری این سیستم، کنترل کننده-های لغزشی-تطبیقی در حضور عوامل ناخواسته‌ای همچون عدم قطعیت، اغتشاش، ورودی‌های کنترلی غیرخطی و نامعلوم بودن پارامترهای سیستم، طراحی شدند. از سطوح لغزشی-تطبیقی و قانون-های تطبیق در طراحی این کنترل کننده‌ها استفاده شد. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، پایداری دینامیک مد لغزشی سیستم فوق آشوب و شرط رسیدن به دو سطح لغزشی-تطبیقی اثبات شد. برای حذف سوئیچینگ‌های فرکانس بالای سیگنال‌های کنترل و در نتیجه کاهش پدیده وزوز، از جایگزینی تابع علامت با یک تابع پیوسته استفاده شد. نتایج شبیه‌سازی با استفاده از نرم افزار MATLAB نشان داد که کنترل کننده‌های طراحی شده، قادر به حذف پدیده فوق آشوب و همگرا ساختن سیستم به سمت نقطه تعادل می‌باشند. همچنین با جایگزینی تابع علامت با یک تابع پیوسته، سوئیچینگ‌های فرکانس بالای سیگنال‌های کنترلی تا حد بسیار زیادی کاهش یافت.

## مراجع

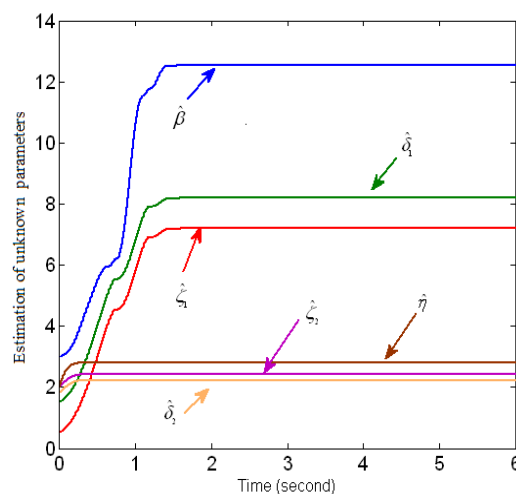
- [1] Perez, G., Cerdeira, H.A., 1995, "Extracting messages masked by chaos", *Physical Review Letters*, 74, 1970-1973.
- [2] Enys, A.C., Tamashevicius, A., Baziliauskas, A., 2003, "Hyperchaos in coupled Colpitts oscillators", *Chaos, Solitons Fractals*, 17, 349-353.
- [3] Kiss, I. Z., Wang, W., 2001, "Forcing Coupling and Feedback of Chaotic electrochemical Oscillators in Experimental Chaos", *6<sup>th</sup> Experimental chaos Conference*, Potsdam, Germany, 622, pp. 3-11.
- [4] Jing, Z., Xu, D., Chang, Y., Chen, L., 2003, "Bifurcations, chaos, and system collapse in a three node power system", *Electrical Power and Energy Systems*, 25, 443-461.
- [5] Goedgebuer, J.P., Larger, L., Porle, H., 1998, "Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode", *Physical Review Letters*, 80, 2249-2252.
- [6] Jia, Q., 2007, "Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control", *Physics Letters A*, 366, 217-222.
- [7] Sparrow, C., *The Lorenz equation: bifurcation, chaos and strange attractors*, Springer, New York, 1982.



شکل ۸: نمودار دو سطح لغزشی  $s_1(t), s_2(t)$



شکل ۹: نمودار سیگنال‌های کنترلی رابطه (۴۱)



شکل ۱۰: پاسخ زمانی پارامترهای نامعلوم با در نظر گرفتن قوانین تطبیق

- [۲۱] سارا دادرس، تابستان ۱۳۸۷، "طراحی کنترل کننده بر پایه مد لغزشی برای سیستم های آشوبناک"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.
- [22] Rössler, O.E., 1979, "An equation for hyperchaos", *Physics Letters A*, 71, 155-157.
- [23] Wang, C., Zhang, X., Zheng, Y., Li, Y., 2006, "A new modified hyperchaotic Lü system", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371, 260-272.
- [24] Li, Y., Chen, G., Tang, W.K.S., 2005, "Controlling a unified chaotic system to hyperchaotic", *IEEE Transaction Circuit System II*, 52, 204-207.
- [25] Tam, L.M., Chen, J.H., Chen, H.K., Tou, W.M.S., 2008, "Generation of hyperchaos from the Chen-Lee system via sinusoidal perturbation", *Chaos, Solitons and Fractals*, 38, 826-839.
- [26] Wu, X., Lu, J.A., Lu, H.C., Wong, S.C., 2007, "Suppression and generation of chaos for a three-dimensional autonomous system using parametric perturbations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 31, 811-819.
- [27] Yau, H.T., Yan, J.J., 2008, "Chaos synchronization of different chaotic systems subjected to input nonlinearity", *Applied Mathematics and Computation*, 197, 775-788.
- [28] Yan, J.J., 2004, "Design of robust controllers for uncertain chaotic systems with nonlinear input", *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 541-547.
- [29] Yau, H.T., Yan, J.J., 2007, "Robust controlling hyperchaos of the Rössler system subject to input nonlinearities by using sliding mode control", *Chaos, Solitons and Fractals*, 33, 1767-1776.
- [30] Kuo, C.L., Wang, C.C., Pai, N.S., 2009, "Design of variable structure synchronization controller for two different hyperchaotic systems containing nonlinear inputs", *Journal of Applied Sciences*, 9, 2635-2639.
- [31] Yan, J.J., 2004, " $H_\infty$  controlling hyperchaos of the Rössler system with input nonlinearity", *Chaos, Solitons and Fractals*, 21, 283-293.
- [8] Wu, W., Chen, Z., Yuan, Z., 2009, "The evolution of a novel four-dimensional autonomous system: Among 3-torus, limit cycle, 2-torus, chaos and hyperchaos", *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 2340-2356.
- [9] Chen, Z., Yuang, Y., Qi, G., Yuan, Z., 2007, "A novel hyperchaos system only with one equilibrium", *Physics Letters A*, 36, 696-701.
- [10] Gao, T., Chen, Z., Gu, Q., Yuan, Z., 2008, "A new hyper-chaos generated from generalized Lorenz system via nonlinear feedback", *Chaos, Solitons and Fractals*, 35, 390-397.
- [11] Ge, Z. M., Yang, G. H., 2009, "Hyperchaos of four state autonomous system with three positive lyapunov exponents", *Physics Letters A*, 373, 349-353.
- [12] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J.A., 1990, "Controlling chaos", *Physical Review Letters*, 64, 1196-1199.
- [13] Andrevskii, B.R., Fradkov, A.L., 2003, "Control of chaos: Methods and Application", *Automation and Remote Control*, 64, 675-718
- [14] Laoye, J.A., Vincent, U.E., Kareem, S.O., 2009, "Chaos control of 4D chaotic systems using recursive backstepping nonlinear controller", *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 356-362.
- [15] Dou, F.Q., Sun, J.A., Duan, W.S., Lü, K.P., 2009, "Controlling hyperchaos in the new hyperchaotic system", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 552-559.
- [16] Hou, Y.Y., Liao, T.L., Yan, J.J., 2007, " $H_\infty$  synchronization of chaotic systems using output feedback control design", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379, 81-89.
- [17] Jiang, W., Qiao, G. G., Bin, D., 2005, " $H_\infty$  variable universe adaptive fuzzy control for chaotic system", *Chaos, Solitons and Fractals*, 24, 1075-1086.
- [18] Wang, H., Han, Z.Z., Xie, Q.Y., Zhang, W., 2009, "Sliding mode control for chaotic systems based on LMI", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1410-1417.
- [19] Chiang, T.Y., Hung, M. L., 2007, "Sliding mode control for uncertain unified chaotic systems with input nonlinearity", *Chaos, Soliton and Fractals*, 34, 437-442.
- [20] Dadras, S., Momeni, H.R., Majd, V.J., 2009, "Sliding mode control for uncertain new chaotic dynamical system", *Chaos, Solitons and Fractals*, 41, 1857-1862.